Programm,

mit welchem zu der

öffentlichen Prüfung und Schlußfeierlichkeit

des

Kurfürstlichen Gymnasiums zu Fulda

auf

den 7., 8. und 9. April 1862

ergebenst einladet der Director des Gymnasiums

Dr. Eduard Wesener.

Inhalt:

Fulda 1862.

Druck von Johann Leonard Uth.

Als ich es übernahm das Programm zu schreiben, war ich im Zweifel, ob ich einen mathematischen Gegenstand zum Vorwurf desselben wählen solle, der nur Fachmänner interessire, oder einen solchen, dessen Verständniß auch den gebildeten Freunden der Schule zugänglich sei. Ich entschied mich für das Letztere, veranlaßt hauptsächlich durch die Erwägung, daß jetzt, wo so viele wissenschaftliche Zeitschriften bestehen, die Programme eigentlich nur noch die Erziehung oder den Unterricht Betreffendes oder doch nur solche Gegenstände behandeln sollten, welche nicht über den Horizont der reiferen Primaner hinausliegen und mit Interesse und Nutzen von denselben gelesen werden können.

Der Gegenstand, welchen ich gewählt habe, die Parallelentheorie nämlich, bietet nur ein formales, logisches Interesse. Er scheint, wohl mit aus diesem Grunde, in der neueren, dem Praktischen zugewandten Zeit weniger der Gunst der Mathematiker sich zu erfreuen, als dies in der früheren Zeit der Fall war, wo noch Euklid in den Schulen herrschte. Denn die Anerkennung der Meisterschaft Euklids, die Ueberzeugung von der Vollkommenheit seiner Elemente als Lehrbuch der Geometrie hinderte seine Schüler und Verehrer nicht die Lücken in seiner Parallelentheorie zu erkennen und die Ausfüllung derselben zu versuchen. Ja Euklid selbst war sich dieses Mangels bewußt. Durch die Annahme seines eilften Grundsatzes, von dem er gewiß eben so gut wie wir wußte, daß er eines Beweises bedürfe, sprach er doch wohl nur die Ueberzeugung aus, daß bei seinen Anschauungen und den daraus abgeleiteten Grundbegriffen der Beweis dieses Satzes unmöglich sei. Die Richtigkeit dieser Ansicht wurde bestätigt durch das Mißlingen aller der unzähligen Versuche, welche seitdem gemacht wurden, jenen Satz gestützt auf Euklid'sche Erklärungen zu beweisen. Zu diesem Ziele führt ein anderer Weg. Er ist längst angedeutet, ja betreten und sogar kurz und bequem. Aber wie eine süße Gewohnheit, eine lieb gewonnene Neigung, selbst wenn ihre Schädlichkeit erkannt ist, nur selten und auch dann immer nur mit großen Beschwerden abgelegt wird, so konnten auch bis jetzt die meisten Mathematiker sich nicht entschließen ihre von Euklid überkommenen Vorstellungen, wie es jener neue Weg fordert, aufzugeben, und selbst diejenigen, welche sich genöthigt sahen anzuerkennen, daß jener Weg richtig zum Ziele führe, glaubten ihn doch wegen der Schwierigkeiten, die er in seiner bisherigen Gestalt bot, aus den Lehrbüchern der Elementargeometrie verbannen zu müssen. Es gibt aber eine Gestalt desselben, in welcher er den Schülern sehr leicht zugänglich ist. Ehe ich diese auseinandersetze, glaube ich die verschiedenen, bisher betretenen Wege, auf welchen man die Begründung der Parallelentheorie versuchte, wenigstens kurz andeuten und zeigen zu müssen, warum sie nicht zum Ziele führten.

Ich will keine kritische Beleuchtung der einzelnen Parallelentheorien geben, wie dies Hoffmann in seiner Kritik der Parallelentheorie gethan hat, und wahrscheinlich auch Klügel in einer mir unbekannten, wie er selbst im mathematischen Wörterbuch sagt, zu Göttingen im Jahre 1763 unter Kästners Aufsicht ausgearbeiteten Schrift, welche acht und zwanzig mehr oder weniger verschiedene Beweisarten anführt und beurtheilt. Auch will ich nicht die einzelnen Beweisarten am Faden der Geschichte verfolgen; dazu fehlt es mir an Zeit und besonders auch bei der Entfernung von jeder größeren Bibliothek an Hülfsmitteln; ich beabsichtige nur die Erlebnisse oder die inneren Erfahrungen mitzutheilen, welche ich während einer langen Lehrthätigkeit weniger in der Schule selbst als beim Arbeiten für die Schule in Bezug auf diesen Gegenstand gemacht habe. Ich werde daher die Versuche die Parallelentheorie von Euklid'schen Ansichten aus zu begründen in Gruppen besprechen, welche ich unbekümmert um die Zeit ihrer Entstehung nur nach dem Inhalt zusammenstelle, dann zur Beurtheilung der hierher gehörigen Definitionen übergehen und endlich die neueren Ansichten und ihre Vereinfachung mittheilen.

Bevor ich jedoch zur Auseinandersetzung jener Versuche übergehe, glaube ich in Rücksicht auf den oben vorausgesetzten Leserkreis nicht nur die Aufgabe der Parallelentheorie und ihre Lösung durch Euklid, sondern auch die dahin gehörigen Euklid'schen Definitionen angeben zu müssen.

I.

Euklid sagt: „Die gerade Linie ist eine solche, welche zwischen je zweien ihrer Punkte nur auf eine Art liegen kann."

Eine vollkommnere Erklärung der geraden Linie haben wir auch jetzt noch nicht. Denn wenn wir sie eine Linie nennen, deren Punkte alle ihre Lage im Raume dadurch nicht verändern, daß wir die Linie selbst um zwei beliebige in ihr liegende, als fest gedachte Punkte umdrehen, so setzen wir ebenfalls voraus, daß es eine solche Linie gibt.

Auch die Crell'sche Erklärung, nach welcher sie eine Linie ist, die je an zwei entgegengesetzten Seiten dieselbe Gestalt hat, so daß, wenn man die eine Seite der Linie in die andere, d. h. den Flächenraum an der einen Seite in den Flächenraum an der anderen legt, die Gränzen dieser Räume an demselben Orte im Raume bleiben, sagt nichts anderes aus und setzt nicht nur dasselbe, sondern auch noch den Begriff der Ebene voraus. Denn wie soll man bei von einer geraden Linie begränzten Kegel- oder Cylinderflächen den Flächenraum an der einen Seite der Linie in den an ihrer anderen Seite legen? Doch zeigt diese Erklärung am anschaulichsten, was wir unter gerader Linie verstanden wissen wollen, sie läßt aber auch am deutlichsten die Mängel der drei Erklärungen hervortreten. Denn daß eine Linie an zwei entgegengesetzten Seiten dieselbe Gestalt haben könne, wird Niemand bezweifeln, daß sie aber auch dann an je zwei andern dieser Seiten dieselbe Gestalt haben müsse, wird ohne Begründung dieser Nothwendigkeit Niemand annehmen wollen. Wir haben hier also Lehrsätze in der Form von Definitionen; denn der Grund, aus welchem die Behauptung als Folge der Voraussetzung erscheint, ist nicht mitgegeben. Da dieser Grund leider auch gar nicht bekannt ist, so läßt sich auch die reale Möglichkeit der geraden Linie nicht nachweisen; bis er, was hoffentlich recht bald geschieht, gefunden wird, müssen wir uns mit der subjektiven Möglichkeit begnügen. Obgleich diese Lücke nur eine formale ist und daher keinen Einfluß auf die Begründung der Geometrie, also auch nicht, wie viele irrthümlich meinen, auf die Begründung der Parallelentheorie ausüben kann, so dürfen wir doch nicht ruhen, bis auch sie ausgefüllt ist.

Euklid gibt ferner noch folgende hierher gehörende Erklärungen:

Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier geraden Linien gegeneinander, welche in einer Ebene zusammenlaufen, ohne in einer geraden Linie zu liegen.

Parallel sind gerade Linien in einer Ebene, die, soweit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Ueber diese und andere Erklärungen des Winkels und der Parallelen später ausführlicher.

Da die Winkel an verschiedenen Scheiteln sehr verschieden benannt werden, so gebe ich zur Vermeidung von Mißverständnissen hier an, wie ich die wichtigsten derselben zu benennen pflege. Werden zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten, so nenne ich von den dadurch gebildeten Winkelpaaren diejenigen, deren einzelne Winkel an verschiedenen Durchschnittspunkten liegen, im Allgemeinen Gegen- oder Wechselwinkel, je nachdem die einzelnen

Winkel beide derselben oder verschiedenen Seiten der schneidenden Linie anliegen. Im engeren Sinne aber gebrauche ich das Wort Gegen- oder Wechselwinkel nur für diejenigen Gegen- oder Wechselwinkelpaare, deren einzelne Winkel beide innerhalb, oder beide außerhalb der durchschnittenen Linien, also einander zugewendet oder von einander abgewendet liegen; die Gegenwinkelpaare aber, deren einer Winkel innerhalb und deren anderer außerhalb der durchschnittenen Linien liegt, welche also in Bezug auf die Richtung ihrer Schenkel und ihre eigene eine ganz gleiche Lage haben, nenne ich gleichliegende oder correspondirende Winkel.

Den Satz, welcher die Abhängigkeit dieser Winkel bestimmt, will ich, weil ich mich häufig auf ihn werde berufen müssen, ebenfalls hier angeben und mit ♁ bezeichnen. Er heißt:

♁ Sind zwei correspondirende-, oder zwei Wechselwinkel gleich, oder betragen zwei Gegenwinkel zusammen zwei Rechte, so sind auch je zwei correspondirende-, und je zwei Wechselwinkel gleich, und je zwei Gegenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Für diejenigen, welche Euklid's Elemente selbst nicht kennen, bemerke ich, daß bei ihm den Beweisen der Sätze über Parallelen und Convergenten die Beweise der Sätze über die Winkel und über die Dreiecke, und zwar sowohl über die Winkel eines Dreiecks, als auch über die Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln in einem und in verschiedenen Dreiecken, mit alleiniger Ausnahme des einen Satzes über die Summe der drei Winkel in einem Dreiecke, vorausgehen; freilich in einer scheinbar so großen Unordnung, daß nur der den Faden aus diesem Labyrinthe finden kann, welcher die Sätze aus dem Beweise des Schlußsatzes des ersten Kapitels, dem Pythagoräischen Lehrsatze nämlich, analytisch entwickelt.

Zur Begründung der Parallelentheorie ist nur der Beweis von vier Hauptsätzen nöthig; alle übrigen Sätze derselben lassen sich leicht aus diesen folgern. Sie heißen, wenn man die Euklid'sche Definition der Parallelen voraussetzt:

I. Wenn zwei gerade Linien mit derselben dritten zwei gleiche correspondirende- oder zwei gleiche Wechselwinkel oder zwei Gegenwinkel bilden, welche zusammen zwei Rechte betragen, so sind sie parallel.

II. Wenn zwei gerade Linien mit derselben dritten zwei ungleiche correspondirende- oder zwei ungleiche Wechselwinkel oder zwei Gegenwinkel bilden, welche größer oder kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich die beiden ersteren Linien und zwar auf der Seite der dritten, auf welcher ein äußerer Winkel größer ist als sein innerer correspondirender Winkel, oder auf welcher zwei innere Gegenwinkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen.

III. Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so bilden sie mit jeder dritten sie schneidenden geraden Linie gleiche correspondirende- und gleiche Wechselwinkel, sowie Gegenwinkel, welche Supplemente sind.

IV. Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so bilden sie mit jeder dritten sie schneidenden geraden Linie ungleiche correspondirende Winkel und innere Gegenwinkel, welche keine zwei Rechte betragen, und zwar sind auf der Seite der Convergenz die äußeren Winkel größer wie ihre inneren correspondirenden Winkel, und die beiden inneren Gegenwinkel betragen zusammen weniger wie zwei Rechte; auf der Seite der Divergenz aber findet das Gegentheil statt.

Von diesen vier Sätzen lassen sich aber der I. und IV. ebenso wie der II. und III. durch Contraposition unmittelbar auseinander folgern; denn da hier nur von contradiktorischen Gegensätzen die Rede ist, so schließen wir richtig von der Wahrheit je eines Satzes von jedem dieser Sätzepaare auf die des anderen. Der Satz I sagt nämlich aus, daß durch die Gleichheit der correspondirenden Winkel (A) der Parallelismus der Linien (B) bedingt sei, d. h.

Ia. Wenn A ist, so muß auch stets B sein.

Daraus folgt aber unmittelbar durch Contraposition:

IVa. Wenn B nicht ist, so kann auch nicht A sein.

Nun gibt es aber nur parallele oder nicht parallele, d. h. sich schneidende Linien, und ebenso nur gleiche oder ungleiche correspondirende Winkel; d. h. es gibt nur B oder Nicht-B, A oder Nicht-A. Daher muß, wenn B nicht ist, Nicht-B, wenn A nicht ist, Nicht-A, wenn Nicht-B nicht ist, B, und wenn Nicht-A nicht ist, A sein.

Die gegenseitige Abhängigkeit unserer Sätzepaare I IV, und II III, erhellt nun leicht aus folgenden Schematen, von welchen jedes mit der Nummer des durch dasselbe bezeichneten Satzes versehen ist.

Ia.	Wenn A ist, so muß auch B sein.	IIIa.	Wenn B ist, so muß auch A sein.
IVa.	Wenn B nicht ist, so kann auch A nicht sein.	IIa.	Wenn A nicht ist, so kann auch B nicht sein.
IVb.	Wenn Nicht-B ist, so muß auch Nicht-A sein.	IIb.	Wenn Nicht-A ist, so muß auch Nicht-B sein.
Ib.	Wenn Nicht-A nicht ist, so kann auch Nicht-B nicht sein.	IIIb.	Wenn Nicht-B nicht ist, so kann auch Nicht-A nicht sein.
Ia.	Wenn A ist, so muß auch B sein.	IIIa.	Wenn B ist, so muß auch A sein.

Von solchen durch Contraposition gebildeten Gegensätzen wird in der Mathematik der eine meist indirekt mit Hülfe des anderen bewiesen.

Euklid hat zuerst den Beweis des Satzes IV im sechzehnten Satze des ersten Buches seiner Elemente gegeben. Streng genommen ist es eigentlich nicht der IVte Satz selbst, den er bewiesen hat, sondern eine andere Einkleidung desselben, nämlich die, daß *jeder Außenwinkel eines Dreiecks größer ist als jeder der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel desselben.*

Als Vorbereitung zum Beweise zieht er von den Ecken eines Dreiecks Transversalen nach den Halbirungspunkten der gegenüberliegenden Seiten, verdoppelt dieselben durch Verlängerung über diesen Punkt hinaus und verbindet die so erhaltenen Endpunkte mit den Ecken des Dreiecks. Dadurch erhält er Scheiteldreiecke, welche von einer Transversalen oder von ihrer Verlängerung und je einer der Hälften der durch sie halbirten Seite begränzt werden. Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt zwar zunächst nur, daß jeder Außenwinkel des Dreiecks größer ist wie einer von den beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkeln desselben; daraus aber und aus der Gleichheit der an derselben Ecke liegenden Außenwinkel, als Scheitelwinkel, ergibt sich das im Lehrsatze Behauptete.

Die Umkehrung dieses IVten Satzes, nämlich unser Satz II, ist bei Euklid der eilfte der zwölf Grundsätze, welche er dem ersten Buche seiner Elemente voranstellt. Daher blieben ihm zur Begründung der vier Hauptsätze der Parallelentheorie nur noch die Beweise des I. und II. Satzes übrig, welche er, wie wir oben gesehen haben, leicht indirekt führen konnte. Dies that er zum siebenundzwanzigsten und neunundzwanzigsten Satze.

Niemand wird an der Parallelentheorie Euklids etwas auszusetzen finden, welcher den IIten Satz als Grundsatz, d. h. als Satz, der keines Beweises bedarf, anerkennt. Gegen diese Anerkennung aber sträubt sich das logische Gewissen. Denn daß er an sich, ohne Beweis, nicht gewiß ist, dies bestätigen schon die vielen Versuche ihn zu beweisen. Aber auch ein näheres Eingehen auf den Satz selbst wird uns zeigen, daß die Behauptung desselben nicht in allen Fällen als unmittelbar gewisse Folge seiner Voraussetzung sich wahrnehmen läßt. Nehmen wir dazu den Satz in seiner einfachsten Gestalt, nämlich zwei gerade Linien, von welchen die eine senkrecht, die andere schief gegen dieselbe dritte gerade Linie steht. Leicht läßt sich hier zwar erkennen, daß die beiden ersteren

Linien sich schneiden, wenn die schiefe Linie sehr stark gegen die dritte Linie geneigt ist, d. h. einen kleinen spitzen Winkel mit ihr gegen die erste Linie hin bildet; wenn aber dieser Winkel nahezu einen Rechten beträgt, so läßt uns die Wahrnehmung im Stiche; aber selbst wenn sie uns auch in diesem Falle die Gewißheit gäbe, daß sich beide erstere Linien mehr und mehr annäherten, so berechtigte uns auch dies noch nicht zu dem Schlusse, daß beide Linien sich durchschneiden müßten. Schon die Annahme einer ununterbrochenen Annäherung beider Linien, noch mehr aber die ihrer Annäherung bis zum Durchschneiden ist eine logische Willkühr, ein Schluß vom Besonderen aufs Allgemeine. Die Mathematik kann aber nur dadurch auf unumstößliche Gewißheit Anspruch machen, daß sie ihre Schlüsse auf unbestreitbare Voraussetzungen gründet; sie darf daher auch keine Lücken, am wenigsten formale, logische zulassen. Das strenge speculative Denken duldet, wie Herbart sagt, keine Willkührlichkeiten.

Sollen wir uns, abgeschreckt durch die Schwierigkeit des Beweises, wie es geschehen ist, damit trösten, daß der Satz doch sachlich richtig sei, d. h. daß seine Annahme die sachliche Gewißheit der Parallelentheorie und der auf sie gegründeten Sätze nicht erschüttere, und daß noch andere Mängel in der Geometrie bestehen, wie die Definition der geraden Linie, der Ebene, über welche wir leicht hinweggingen, während wir uns nur bei diesem Satze so viele Mühe machten? Wollen wir uns dieses Armuthszeugniß in Bezug auf den Willen und die Denkkraft ausstellen? Aus der Erkenntniß jener Lücken kann doch nur die Verpflichtung für uns abgeleitet werden an ihrer Ausfüllung zu arbeiten, nicht aber resignirt die Hände in den Schooß zu legen.

II.

Wer die Grundanschauungen und die daraus abgeleiteten Erklärungen Euklids festhält, muß, wie dieser, bald die Ueberzeugung gewinnen, daß diese Stützen weder hinreichen zur Begründung des eilften Grundsatzes selbst, noch zu der seines Gegensatzes, nämlich unserer Sätze II und III.

Dies gab die Veranlassung zur Aufstellung anderer scheinbar einfacherer Sätze. Sie finden sich zerstreut in den einzelnen Parallelentheorien, lassen sich aber leicht vollständig aus den Sätzen II und III analytisch entwickeln. Ich stelle sie hier in zwei Gruppen zusammen und werde bei den Sätzen einer jeden einzelnen Gruppe kurz zeigen, wie sich bei vorausgesetzter Richtigkeit irgend eines von ihnen jeder andere beweisen läßt, dann werde ich die Versuche sie unmittelbar zu beweisen auseinandersetzen und endlich die hauptsächlichsten Weisen mittheilen, auf welche durch sie die Parallelentheorie begründet worden ist.

Die Sätze der ersten Gruppe heißen:

1r Satz. *Sind die von zwei beliebigen Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten gleich, so stehen sie auch auf der ersten Linie senkrecht und schneiden von beiden gleiche Stücke ab.*

2r Satz. *Steht eine von irgend einem Punkte einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte auch auf der ersten senkrecht, so muß auch jede andere von der ersten auf die zweite Linie gefällte Senkrechte auf der ersten senkrecht stehen und der ersten Senkrechten gleich sein; ferner müssen auch je zwei von der ersten auf die zweite Linie gefällte Senkrechte von beiden Linien gleiche Stücke abschneiden.*

Bei vorausgesetzter Richtigkeit des Satzes 1 läßt sich Satz 2 leicht beweisen. Man braucht nur von beiden geraden Linien auf derselben Seite der Senkrechten von dieser an gleiche Stücke abzuschneiden und die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie zu verbinden, so muß nach 1 diese Verbindungslinie auf beiden geraden Linien senkrecht stehen und der ersten Senkrechten gleich sein. Da es nun von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie auf diese nur eine Senkrechte gibt, so ist der Satz bewiesen.

Um 1 aus 2 zu beweisen, muß man vom Endpunkt der einen Senkrechten eine Senkrechte auf die andere fällen und zeigen, daß diese mit der Verbindungslinie der Endpunkte der beiden ersten Senkrechten zusammenfällt. Dies folgt aber daraus, daß die vom Endpunkt der einen auf die andere Senkrechte gefällte dritte Senkrechte (nach 2) von beiden ersteren, welche nach der Voraussetzung gleich sind, gleiche Stücke abschneiden muß.

3r Satz. Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten ungleich, so bilden sie mit der ersten geraden Linie innere Gegenwinkel, von welchen der an der größeren Senkrechten liegende spitz, der andere an der kleineren liegende aber sein stumpfer Supplementwinkel ist.

Um diesen Satz 3 mit Hülfe des Satzes 1 zu beweisen, braucht man nur auf jeder der beiden, wo nöthig verlängerten Senkrechten vom Fußpunkt an ein Stück abzutragen, welches der anderen Senkrechten gleich ist, und den Endpunkt jedes dieser Stücke mit dem Anfangspunkt der anderen Senkrechten zu verbinden; dann müssen diese Verbindungslinien gleich sein und mit beiden Senkrechten rechte Winkel bilden. Daraus folgt aber die Congruenz der zwischen ihnen und den Senkrechten liegenden Dreiecke und daraus endlich die Behauptung unseres Satzes.

Fast ebenso ließe sich der Satz 3 mit Hülfe des Satzes 2 beweisen. Dieser aber folgt aus unserem Satze 3 leicht indirekt.

4r Satz. Bildet eine von irgend einem Punkte einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte mit der ersten ungleiche Nebenwinkel, so ist jede andere von irgend einem Punkte der ersten Linie auf die zweite gefällte Senkrechte größer oder kleiner als die erste, je nachdem ihr Anfangspunkt im Schenkel des stumpfen oder in dem seines spitzen Nebenwinkels liegt.

Sehr leicht läßt sich dieser Satz 4 indirekt aus dem 1. und 3. beweisen. Um ihn direkt aus 1 zu beweisen, braucht man nur von irgend einem Punkte der ersten geraden Linie eine zweite Senkrechte auf die zweite gerade Linie zu fällen, dann auf der, wenn es nöthig sein sollte, verlängerten ersten Senkrechten vom Fußpunkt an ein der zweiten Senkrechten gleiches Stück abzutragen und dessen Endpunkt mit dem Anfangspunkt der zweiten Senkrechten zu verbinden. Diese Verbindungslinie muß dann nach 1 mit beiden Senkrechten rechte Winkel bilden, deßwegen aber und weil zwei Winkel im Dreieck weniger wie zwei Rechte betragen, entweder in den spitzen Winkel, welchen die erste Senkrechte mit der ersten geraden Linie bildet, selbst fallen oder in seinen Scheitelwinkel, je nachdem sie und also auch die zweite Senkrechte von der ersten auf der Seite des spitzen Winkels oder auf der seines stumpfen Nebenwinkels liegt; d. h. die zweite Senkrechte muß im ersten Falle kleiner, im zweiten größer sein als die erste, was behauptet wurde.

Der Satz 1 wird aus 4 indirekt bewiesen.

Zusatz zu 4. Steht eine Senkrechte, welche von einem Punkte einer geraden Linie auf eine zweite gefällt wird, auf der ersten schief, so muß jede andere von der ersten auf die zweite Linie gefällte Senkrechte um so kleiner werden, je weiter ihr Anfangspunkt im Schenkel des spitzen Winkels, und um so größer, je weiter er im Schenkel des stumpfen Winkels von der ersten Senkrechten absteht.

Alle innerhalb des spitzen Winkels, welchen die erste Senkrechte mit der ersten geraden Linie bildet, liegenden Senkrechten sind (nach 4) kleiner wie die erste und bilden daher (nach 3) mit der ersten geraden Linie nach derselben Richtung hin spitze Winkel, weil sie Supplementwinkel von gleichen stumpfen Winkeln sind; daher muß auch (nach 4) jede folgende kleiner sein als die vorhergehende. Fast mit denselben Worten läßt sich das Größerwerden der Senkrechten beweisen, welche im stumpfen Winkel der ersten liegen und sich von dieser mehr und mehr entfernen.

5r Satz. Werden zwei gerade Linien von beliebig vielen anderen durchschnitten, und sind von den Gegen- und Wechselwinkeln, welche jene zwei mit einer beliebigen von diesen bilden, irgend zwei correspondirende- oder zwei Wechselwinkel gleich, oder zwei Gegenwinkel Supplemente, so sind auch je zwei andere an irgend einer der schneidenden Linie liegende correspondirende- oder Wechselwinkel gleich und je zwei Gegenwinkel Supplemente.

Gestützt auf den Satz 2 bietet der Beweis dieses Satzes keine Schwierigkeit. Nehmen wir nämlich zuerst an, daß die erste schneidende Linie senkrecht auf einer der beiden durchschnittenen Linien, also nach der Voraussetzung auch senkrecht auf der anderen stehe, und fällen dann von jedem der Punkte, in welchem eine beliebige der schiefen Linien eine der beiden ersten Linien schneidet, eine Senkrechte auf die andere, so sind diese Senkrechten (nach 2) gleich und schneiden von den beiden ersten Linien gleiche Stücke ab; daher sind die durch sie gebildeten Dreiecke (Euklid 7) congruent und deßwegen wieder die Wechselwinkel gleich, woraus die übrigen Theile der Behauptung leicht gefolgert werden können.

Ist aber zweitens die erste schneidende schief gegen beide durchschnittene Linien geneigt, so halbire man ihr zwischen diesen liegendes Stück und fälle auf die durchschnittenen Linien vom Halbirungspunkt aus Senkrechte. Aus der Congruenz der hierdurch gebildeten rechtwinkligen Dreiecke (Euklid 26) folgt die Gleichheit der Winkel am Halbirungspunkt und daraus wieder, daß die beiden Senkrechten in dieselbe gerade Linie fallen; wodurch unser zweiter Fall auf den ersten reduzirt ist.

Der Satz 2 ist nur ein besonderer Fall des Satzes 5; daher folgt er unmittelbar aus diesem.

Zusatz. Die drei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.

Dieser Satz ist eigentlich nur eine einfachere Form des obigen, mit dessen Hülfe er sich auch leicht auf eine der gewöhnlichen Arten beweisen läßt.

6r Satz. Werden zwei gerade Linien von beliebig vielen anderen durchschnitten, und sind von den Gegenwinkeln, welche die schneidenden mit derselben Richtung der durchschnittenen Linien bilden, zwei innere zusammen kleiner als zwei Rechte, oder ein äußerer größer als sein innerer correspondirender, so sind auch von diesen, an irgend einer der schneidenden Linien liegenden Gegenwinkeln je zwei innere zusammen kleiner als zwei Rechte, und jeder äußere größer als sein innerer correspondirender; von den Gegenwinkeln aber, welche die schneidenden Linien mit der entgegengesetzten Richtung der beiden durchschnittenen Linien bilden, sind dann je zwei innere größer als zwei Rechte, und jeder äußere kleiner als sein innerer correspondirender.

Leitet man aus dem Zusatz zu 5 den Satz ab, daß die Winkel eines Vierecks gleich vier Rechten sind, so ist unser Satz eigentlich schon bewiesen.

Alle vorhergehenden Sätze lassen sich indirekt aus dem 6ten beweisen, am einfachsten natürlich der durch Contraposition aus ihm gebildete 5te Satz.

7r Satz. Werden zwei gerade Linien von beliebig vielen anderen durchschnitten, und bildet eine der schneidenden mit einer Richtung der durchschnittenen Linien innere Gegenwinkel, welche kleiner als zwei Rechte sind, während die anderen von der ersten geraden Linie gleiche Stücke abschneiden und auf der zweiten senkrecht stehen, so müssen diese, in der oben angegebenen Richtung aufeinander folgenden Senkrechten um gleiche Stücke abnehmen und auf der zweiten geraden Linie gleiche Stücke abschneiden.

Aus Satz 6 folgt, daß die schneidenden Linien mit der oben angegebenen Richtung der durchschnittenen innere Gegenwinkel bilden müssen, welche kleiner als zwei Rechte sind; daher müssen auch diejenigen von ihnen, welche auf der zweiten Linie senkrecht stehen, mit derselben Richtung der ersten spitze Winkel bilden, welche gleich sind, weil die Senkrechten mit der zweiten geraden Linie gleiche correspondirende Winkel bilden und darum auch (nach 5) mit der ersten gleiche correspondirende Winkel bilden müssen. Aus dem Zusatz zu 4 folgt auch noch, daß die nach obiger Richtung aufeinanderfolgenden senkrecht schneidenden Linien, soweit sie zwischen den durchschnittenen liegen, immer kleiner werden. Fällt man nun von den Punkten, in welchen jede folgende von diesen auf der zweiten Linie Senkrechten die erste schneidet, eine Senkrechte auf die vorhergehende, so wird durch diese zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Senkrechten ein Viereck und ein rechtwinkliges Dreieck gebildet. Da nun aber in jedem dieser Vierecke nach 2 je zwei gegenüberstehende Seiten gleich sind, so ist auch die eine der Katheten eines jeden der Dreiecke gleich dem Unterschiede beider Senkrechten, und die andere gleich ihrem Abstand auf der zweiten geraden Linie; da endlich auch die Dreiecke congruent sind (Euklid 26), so sind auch diese Unterschiede und Abstände gleich.

Der Satz 3 ist nur ein besonderer Fall unseres 7ten Satzes.

Zusatz. Schneidet man auf dem einen Schenkel eines Winkels Stücke ab, welche sich verhalten wie 1:2:3:4 u. s. w. und fällt von ihren Endpunkten Senkrechte auf den anderen Schenkel, so verhalten sich nicht nur diese Senkrechten, sondern auch die von ihnen auf dem anderen Schenkel vom Scheitel an abgeschnittenen Stücke ebenfalls wie 1:2:3:4 u. s. w.

Da in jedem Dreieck zwei Winkel zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so folgt der Zusatz unmittelbar aus dem Hauptsatz.

Zusatz 2. In jedem Schenkel eines jeden, wenn auch noch so kleinen Winkels läßt sich immer ein Punkt nicht nur so bestimmen, daß die von ihm auf den anderen Schenkel gefällte Senkrechte größer wird als jede gegebene Linie, sondern auch so, daß die Senkrechte vom andern Schenkel ein Stück abschneidet, welches größer ist wie jede gegebene Linie.

Dies folgt leicht aus Zusatz 1.

III.

Die Sätze 1 bis 4 sind die Hauptsätze, 5 und 6 Verallgemeinerungen und 7 mit seinen Zusätzen Anwendungen derselben auf besondere Fälle. Eine Fortsetzung dieser Anwendungen würde uns auf die Sätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke und durch diese zu einer direkten Lösung unserer Aufgabe führen. Da dieser Weg aber, so viel ich weiß, von Niemand weiter verfolgt worden ist, so begnüge auch ich mich mit dieser Andeutung desselben, und dies um so mehr, als alle unsre Sätze problematisch sind. Denn wir haben zwar gesehen, daß jeder von unseren Hauptsätzen sich durch jeden anderen von ihnen begründen läßt, daß also die Wahrheit aller erkannt wäre, wenn sich nur die Wahrheit eines einzelnen unter ihnen nachweisen ließe. Aber gerade diesen Nachweis können wir nicht geben. Denn von unseren Sätzen läßt sich stets ein Theil der Behauptung leicht beweisen; der Beweis des anderen Theiles ist aber noch keinem Euklidianer gelungen.

Bei den Sätzen 1 und 3 wird durch die beiden von der ersten geraden Linie auf die zweite gefällten Senkrechten ein Viereck gebildet, welches an der Grundlinie, d. i. der zweiten Linie, zwei rechte Winkel hat. Denkt man sich nun dieses Viereck doppelt und das eine umgekehrt so auf das andere gelegt, daß der Fußpunkt der zweiten Senkrechten auf den der ersten, und, was die Gleichheit der Grundlinien gestattet, auch der Fußpunkt der ersten Senkrechten auf den der zweiten fällt, so müssen auch die Senkrechten zusammenfallen. Sind diese Senkrechten, wie im Satz 1 gleich, so müssen ihre Endpunkte und demnach auch die Verbindungslinien ihrer

Endpunkte zusammen fallen und daher auch die Winkel gleich sein, welche sie mit dieser Verbindungslinie, d. i. unserer ersten geraden Linie, bilden. Daß also die Winkel, welche zwei von einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte mit der ersteren Linie bilden, gleich sind, wenn die Senkrechten gleich sind, können wir beweisen; nicht aber, daß diese Winkel rechte sind; sie könnten eben so gut auch spitz oder stumpf sein.

Sind zweitens, wie im Satze 3 vorausgesetzt ist, unsere Senkrechten ungleich, so muß von der umgedrehten Figur der Endpunkt der kleineren Senkrechten in die größere, und der Endpunkt der größeren über die kleinere Senkrechte der ursprünglichen Figur hinausfallen. Die Verbindungslinien der Endpunkte beider Figuren müssen sich daher schneiden, d. h. mit den Senkrechten Dreiecke bilden, und deßwegen der Winkel, welchen jede von ihnen mit der kleineren Senkrechten bildet, größer sein als der, welchen sie mit der größeren bilden, weil der Außenwinkel eines Dreiecks größer ist wie jeder innere ihm nicht anliegende Winkel desselben (Euklid 16). Da aber über das Verhältniß der durch den Durchschnitt gebildeten Theile jeder Verbindungslinie sich nichts ermitteln läßt, so können wir auch die Größe der Winkel nicht näher bestimmen. Sind also zwei von einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte ungleich, so läßt sich nur beweisen, daß der Winkel, welchen die größere Senkrechte mit der ersten Linie bildet, kleiner ist als der, welchen die kleinere Linie mit ihr bildet, aber nicht, daß der erstere Winkel spitz, der andere stumpf, und daher auch nicht, daß der letztere ein Supplement des ersteren sein muß.

Die Beweise der Sätze 2 und 4 sind ebenso unvollständig wie die eben gegebenen. In beiden Sätzen ist eine Senkrechte von der ersten geraden Linie auf die zweite gefällt, welche nur im Satze 2 auch senkrecht auf der ersten geraden Linie, im Satze 4 aber schief gegen dieselbe steht.

Dreht man den einen der durch die Senkrechte gebildeten Theile einer jeden der beiden Figuren um die Senkrechte als Axe herum, bis er in die Ebene des anderen Theiles fällt, so werden im ersten Falle beide Theile der Figur sich decken, im zweiten aber der Schenkel des spitzen Winkels in seinen stumpfen Nebenwinkel fallen; beidemale werden daher je zwei Senkrechte zusammenfallen, deren Fußpunkte auf verschiedenen Seiten der ersten Senkrechten und gleichweit von derselben entfernt liegen. Im ersten Falle, dem Satze 2, müssen daher je zwei entsprechende von diesen Senkrechten gleich sein, im zweiten Falle, dem Satze 4, muß die auf der Seite des spitzen Winkels liegende kleiner sein als die entsprechende auf der anderen Seite. Ob aber eine beliebige von diesen Senkrechten, gleich größer oder kleiner ist als die erste oder eine folgende oder eine vorhergehende, läßt sich nicht nachweisen. Selbst dann, wenn man beide Figuren, vorausgesetzt, daß sie eine gleiche erste Senkrechte haben, verbindet, findet man nur, daß die im Schenkel des spitzen Winkels anfangende Senkrechte kleiner ist als die entsprechende im rechten, und daß diese wieder kleiner ist als die entsprechende im stumpfen. Da man aber das Verhältniß einer mittleren im Schenkel des rechten Winkels anfangenden Senkrechten zu einer anderen nicht entsprechenden und zu der ersten nicht kennt, so kann man auch das Verhältniß der entsprechenden ungleichen Senkrechten zu der ersten oder einer beliebigen anderen nicht entsprechenden hierdurch nicht bestimmen.

Ein anderer Beweis des Satzes 4 führt scheinbar weiter. Fällt man nämlich vom Fußpunkt der ersten Senkrechten, welche in der zweiten geraden Linie liegt, eine Senkrechte auf die erste gerade Linie und von dem Fußpunkt dieser wieder eine Senkrechte auf die zweite und so fort von dem Fußpunkt jeder vorhergehenden auf einer der geraden Linien Senkrechten immer wieder eine Senkrechte auf die andere gerade Linie, so läßt sich leicht zeigen erstens, daß diese Senkrechten von der ersten auf der Seite des spitzen Winkels sich immer weiter entfernen, und zwar mit Hülfe des Satzes: Zwei Winkel im Dreieck betragen weniger als zwei Rechte; zweitens daß jede folgende dieser Fußpunktsenkrechten kleiner ist als die vorhergehende, und zwar mit Hülfe des Satzes: In jedem Dreiecke liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber. Dann läßt sich auch noch leicht beweisen, daß jede andere von der ersten geraden Linie auf die zweite gefällte Senkrechte, welche zwischen zwei ebenfalls von der ersten auf die zweite Linie gefällten Fußpunktsenkrechten liegt, kleiner ist als die vorhergehende und größer als die folgende von diesen letzteren; man braucht dazu nur den Fußpunkt jener Senkrechten mit dem Anfangspunkt der vorhergehenden und ihren Anfangspunkt mit dem Fußpunkt der folgenden zu verbinden und den zweiten der oben angeführten Hülfssätze anzuwenden.

Hieraus können wir nun allerdings schließen, daß jede von der ersten geraden Linie auf die zweite gefällte Senkrechte kleiner sein muß wie jede vorhergehende bis zur ersten, wenn uns der Nachweis gelingt, daß diese Senkrechte entweder selbst eine solche Fußpunktsenkrechte ist oder von zweien derselben eingeschlossen werden kann. Um zu sehen, in wie fern wir hoffen dürfen diesen Beweis zu führen, wollen wir den günstigsten Fall annehmen, nämlich den, daß die beiden geraden Linien in nicht zu großer Entfernung von der ersten Senkrechten sich schneiden. Weil (Euklid 1. 17) zwei Winkel eines Dreiecks immer kleiner als zwei Rechte sind, so müssen dann beide gerade Linien unter einem spitzen Winkel zusammentreffen, und jede Senkrechte, welche von irgend einem Punkte des einen Schenkels auf den anderen gefällt wird, kann nur den letzteren selbst, also nicht seinen Scheitel oder seine Verlängerung treffen, was nichts anderes heißt als, sie kann nicht Null und nicht negativ werden. Dies heißt auf unsere Fußpunktsenkrechten angewendet: So viele derselben wir auch ziehen, und so klein die letzten auch werden mögen, so ist doch immer noch eine viel größere Anzahl derselben möglich, kurz es sind unendlich viele möglich. Daher können wir zwei gerade Linien von solcher Art nur einem kleinen Theile nach durch Fußpunktsenkrechte begränzen, wenn auch eine beliebig große Anzahl derselben gezogen wird. Ueber die letzte derselben hinaus sind wir aber ebensowenig berechtigt auf eine weitere Abnahme der Senkrechten, als auf ein Gleichbleiben oder sogar Wachsen derselben zu schließen. Daß eine von dem Schenkel des stumpfen Winkels, welchen die erste gerade Linie mit der ersten Senkrechten bildet, auf die zweite gerade Linie gefällte Senkrechte größer ist als die erste, läßt sich nur dann beweisen, wenn man durch Fußpunktsenkrechte, die von ihr aus gezogen sind, die erste einschließen kann. Von der ersten Senkrechten aus läßt sich dies nicht zeigen. Denn man müßte im Anfangspunkt der ersten Senkrechten, welcher in der ersten geraden Linie liegt, auf diese eine Senkrechte errichten und annehmen, daß diese die zweite gerade Linie schnitte. Wir können also auch auf der Seite des stumpfen Winkels durch Fußpunktsenkrechte nur von bestimmten der ersten naheliegenden Senkrechten beweisen, daß sie größer sind als die erste. Nur durch einen Schluß vom Besonderen aufs Allgemeine können wir daher die Ueberzeugung erlangen, daß die Behauptung des Satzes durch unsere Fußpunktsenkrechten erwiesen sei.

Ebenso kann der Satz 5 theilweise bewiesen werden. Es läßt sich hier nämlich zeigen, daß, wenn zwei gerade Linien mit einer sie schneidenden geraden Linie gleiche Wechselwinkel bilden, sie dies auch mit jeder anderen sie schneidenden geraden Linie thun müssen, welche durch den Halbirungspunkt der ersten schneidenden geht, so weit diese zwischen den durchschnittenen Linien liegt. Verbindet man diesen Halbirungspunkt mit jedem von zwei Punkten, welche in einer der durchschnittenen Linien gleichweit vom Durchschnittspunkt der ersten schneidenden Linie entfernt auf entgegengesetzten Seiten der letzteren liegen, so erhält man zwei congruente Dreiecke. Aus der Gleichheit der Winkel am Halbirungspunkte folgt, daß die beiden Verbindungslinien in dieselbe gerade Linie fallen, und daraus sowie aus der Gleichheit der anderen Winkel, daß diese mit den beiden ersten von ihr durchschnittenen Linien gleiche Wechselwinkel bildet. Daß aber auch die nicht durch diesen Halbirungspunkt gehenden schneidenden Linien mit den beiden durchschnittenen gleiche Wechselwinkel bilden müssen, läßt sich nicht beweisen.

Zum Zusatz zu 5 hat Legendre einen scharfsinnigen Beweis geliefert. Dieser besteht aus zwei Theilen. Im ersten Theile wird bewiesen, daß die drei Winkel im Dreieck zusammen nicht mehr als zwei Rechte betragen können. Zu dem Ende stellt er (Fig. I.) mehrere congruente Dreiecke ABC, CDE, ... so nebeneinander, daß ihre aneinanderstoßenden Grundlinien in derselben geraden Linie liegen, und ihre Winkel und Seiten in derselben Ordnung aufeinanderfolgen. Nun schließt er: Wären die Winkel eines jeden dieser congruenten Dreiecke zusammen größer als zwei Rechte, also $\alpha+\beta+\gamma>2R$, so müßten, weil $\alpha+\delta+\gamma=2R$ ist, die Winkel $BCD=DEF=\ldots=\delta$ und kleiner als die Winkel $ABC=CDE=\ldots=\beta$, und daher auch die Verbindungslinien der Spitzen $BD=DF=\ldots$ (Euklid 4) und kleiner als die gleichen Grundlinien AC, CE etc. (Euklid 26) sein. Nennt man jede der gleichen Grundlinien g, jede der gleichen Verbindungslinien l und setzt $g-l=d$, so wäre $ng-nl=nd$ oder $ng=nd+nl$. Wie klein auch immer dieser Unterschied sein möchte, so müßte man doch, wenn er einmal bestände, dadurch daß man ihn oft genug wiederholte, eine Linie bilden können, die größer wäre wie jede gegebene, also auch größer wie $AB+BC=AB+KL$, oder man müßte n groß genug nehmen können, daß $nd>AB+KL$, und daher auch ng oder das ihm gleiche $nd+nl>AB+KL+nl$, d. i. $n.AC>n.BD+AB+KL$ würde. Dies heißt aber nichts anderes als es müßte, wenn man nur die Zahl der Dreiecke groß genug nähme, sich endlich ein Vieleck bilden lassen, dessen eine Seite größer wäre als die Summe aller übrigen. Da dies nicht möglich ist, so können die Winkel eines Dreiecks zusammen nur zwei Rechte oder weniger wie zwei Rechte betragen.

Er nimmt daher zweitens an, die Winkel eines Dreiecks (Fig. II.) seien gleich $2R-d$, verlängert die Schenkel eines Winkels (des kleinsten Winkels, wie er sagt), und legt an die Seite BC ein dem Dreieck ABC congruentes Dreieck BCD, so aber, daß Winkel $BCD=ABC$ und $CBD=BCA$ ist. Weil aber (Euklid 16) der Außenwinkel CBE des Dreiecks ABC größer ist als sein innerer ihm nicht anliegender Winkel BCA oder der ihm gleiche Winkel CBD, so muß BD und aus gleichem Grunde auch CD und daher auch der Durchschnittspunkt D beider Linien in den Winkel A fallen. (Warum Hoffmann, Kritik p. 177, sagt, der Beweis dafür, daß D in den Winkel A falle, welchen Legendre schuldig geblieben sei, gehe nicht aus der Natur des Dreiecks hervor, begreife ich nicht.) Kann man nun durch D eine Linie ziehen, welche beide Schenkel des Winkels A in den Punkten E und F durchschneidet, so erhält man ein Dreieck AEF, welches durch die Linien BC, BD, CD in vier Dreiecke zerlegt wird. Die Winkel der Dreiecke ABC und BCD sind nach unserer Annahme zusammen gleich $4R-2d$. Nach dem Obigen können die drei Winkel eines Dreiecks zusammen höchstens gleich zwei Rechten sein. Nehmen wir nun auch diese höchstmögliche Summe für die Winkel der Dreiecke BED und CDF an, so würden die Winkel aller vier Dreiecke zusammen höchstens gleich $8R-2d$ sein. Zieht man davon die Winkel an B, C, D, welche zusammen gleich 6R sind, ab, so würden für die Summe der Winkel des Dreiecks AEF höchstens noch $2R-2d$ übrig bleiben. Bildet man nun das Dreieck AIH auf dieselbe Weise mit Hülfe des Dreiecks ACF, wie dieses eben mit Hülfe von ABC gebildet wurde, und wiederholt dieselben Berechnungen für die Winkel desselben, so könnte die Summe derselben höchstens gleich $2R-4d$ sein. Ebenso läßt sich mit Hülfe von AIH ein viertes und mit dessen Hülfe ein fünftes, und, wenn man so fortfährt, endlich ein ntes Dreieck bilden, dessen Winkelsumme höchstens gleich $2R-2^{n-1}d$ sein könnte. Wie klein nun auch d sein möchte, so würde doch n immer groß genug genommen werden können, daß $2^{n-1}d \geqq 2R$, d. h. daß die Summe der drei Winkel eines Dreiecks Null oder negativ würde. Da dies aber unmöglich ist, so können die Winkel eines Dreiecks zusammen auch nicht kleiner als 2R sein.

Allerdings ist dieser Beweis täuschend, und doch bewegt er sich in seinem zweiten Theile im Zirkel. Denn die Annahme, daß sich durch jeden Punkt innerhalb eines Winkels eine Linie ziehen lasse, welche beide Schenkel desselben durchschneide, setzt, wie wir später zeigen werden, den Euklid'schen Grundsatz voraus, welcher von Legendre gerade mit Hülfe unseres Satzes bewiesen wird.

Vom Satz 6 läßt sich derselbe Theil der Behauptung beweisen, wie vom Satz 5.

Es seien (Fig. III.) AB und CD die beiden geraden Linien, welche von EH in den Punkten F und G so durchschnitten werden, daß sie mit ihr die inneren Gegenwinkel φ und γ bilden, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind, und es sei N der Halbirungspunkt von FG. Zieht man durch den Durchschnittspunkt F die Linie KL so, daß $\varphi + \delta + \gamma = 2R$ wird, so fällt diese Linie auf der rechten Seite von EH oberhalb FB, auf der linken aber unter FA, den andern Zweig von AB. Man nehme nun in den oberhalb liegenden Zweigen beider Linien, also rechts in FL, links in FA je einen beliebigen Punkt I und M an und verbinde ihn mit N; dann muß die links liegende Verbindungslinie die FK in P schneiden. Auf CD mache man hierauf $GT = FI$ und $GQ = FP$ und verbinde T und Q ebenfalls mit N.

Aus der Congruenz (Euklid 4) der so gebildeten Dreieckspaare NFI, NGT und NFP, NGQ folgt: erstens, daß die an dem Scheitel N liegenden Winkel jedes Paares gleich sind, weßhalb die Verlängerung der Linie IN mit NT, und die Verlängerung der Linie MN mit NQ zusammenfallen muß; zweitens, daß auch die Winkel α, ϑ, ebenso wie π, λ einander gleich sind. Nun ist aber (Euklid 16) $\beta > \vartheta$ und $\pi > \mu$; daher muß auch $\beta > \alpha$ und $\lambda > \mu$ und $\beta + \varkappa > \alpha + \varkappa$ und $\lambda + \sigma > \mu + \sigma$, und endlich, weil $\beta + \varkappa = \lambda + \sigma = 2R$ ist, $\alpha + \varkappa < 2R$ und $\mu + \sigma < 2R$ sein.

Von jeder geraden Linie, welche die beiden Linien AB und CD verbindet und durch den Halbirungspunkt (N) der ersten Verbindungslinie (GF) geht, läßt sich daher leicht indirekt zeigen, daß sie mit den Linien AB und CD nach derselben Richtung wie die erste innere Gegenwinkel bilden muß, welche kleiner sind als zwei Rechte. Dasselbe läßt sich aber auch ebenso von jeder anderen die AB und CD verbindenden Linie beweisen, welche eine dieser neuen Verbindungslinien oder eine durch wiederholte Anwendung dieses Satzes gebildete Verbindungslinie von AB und CD halbirt. Obgleich nun alle die unendlich vielen neuen Verbindungslinien von AB und CD, welche jede frühere, eben so gebildete Verbindungslinie halbiren können, der Behauptung unseres Satzes Genüge leisten, und obgleich alle Halbirungspunkte aller dieser unendlich vielen Verbindungslinien, wie man leicht sieht, auf der Seite der ersten Verbindungslinie liegen müssen, auf welcher diese mit AB und CD innere Gegenwinkel bildet, die größer als 2R sind, so läßt sich doch über die Summe der inneren Gegenwinkel, welche die AB und CD mit einer willkührlich gezogenen Verbindungslinie bildet, gar nichts beweisen, selbst wenn diese Linie ganz oder doch zum größeren Theile auf der eben erwähnten Seite der ersten Verbindungslinie liegt.

Anm. Legendre hat unseren Satz für den besonderen Fall zu beweisen gesucht, daß die durch den Halbirungspunkt N der ersten gezogene zweite Verbindungslinie auf einer der verbundenen Linien senkrecht steht. Sein Beweis ist dem unseren ähnlich, aber nicht vollständig. Er hat nämlich nicht untersucht, durch welchen der Durchschnittspunkte F oder G der einen durchschnittenen Linie die (mit der anderen parallele) Hülfslinie gezogen werden müsse. Wenn er diese, hier keineswegs überflüssige Untersuchung geführt und nicht nach dem Augenschein allein construirt hätte, so würde er gefunden haben, daß, wenn $\varphi + \gamma < 2R$ und φ stumpf ist, wie in Fig. 3, die Hülfslinie durch den Scheitel des spitzen Winkels G, wie RS, gezogen werden müsse, damit die GD durch die von N aus auf sie gefällte Senkrechte selbst geschnitten werde; daß man aber, wenn die Gegenwinkel φ und γ beide spitze Winkel sind, die (parallele) Hülfslinie (Fig. 3a) durch F, wie KL, oder durch G, wie RS, ziehen kann, ohne daß weder die AB von der auf KL gefällten Senkrechten NY, noch die CD von der auf RS gefällten NZ selbst geschnitten wird; es könnte dies erst durch die Verlängerung der Senkrechten geschehen. Annehmen aber, daß in diesem Falle das Durchschneiden stattfinden müsse, hieße den elften Grundsatz Euklids voraussetzen.

Für einen Theil der Behauptung des zweiten Zusatzes zu 7 gibt es mehrere strenge Beweise. Der hier mitgetheilte ist dem treffenden direkten Beweis von Hoffmann nachgebildet.

Man nehme den gegebenen Winkel (ABC) doppelt und dieses doppelte ABD abermals doppelt und setze diese Verdoppelung so lange fort, bis der zuletzt entstandene Winkel gleich oder größer als R ist. Dann beschreibe man vom Scheitel der Winkel als dem Mittelpunkte aus mit dem Halbmesser r einen Kreis und ziehe die zu den Winkeln gehörigen Sehnen, von welchen wir die des gegebenen Winkels ABC S, die des doppelten S_1, die des vierfachen S_2 und so fort, die des 2^nfachen S_n nennen wollen. Mit Hülfe der Sätze:

a. Die Halbirungslinie des Centriwinkels halbirt auch den zu ihm gehörigen Bogen und die zu ihm gehörige Sehne und steht auf der letzteren senkrecht; welcher Satz leicht durch Congruenz sich beweisen läßt, und

b. in jedem Dreiecke steht dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber, und dem aus beiden folgenden

c. die Sehne des halben Centriwinkels ist größer als die halbe Sehne des ganzen

findet man, zunächst mit a, daß:

$$AH = \tfrac{1}{2} AG = \tfrac{1}{2} S_n,\ AK = \tfrac{1}{2} AE = \tfrac{1}{2} S_{n-1} \text{ etc.};$$

dann mit b, daß

$$S_n > r, \text{ also } \tfrac{1}{2} S_n > \tfrac{1}{2} r$$

und mit c, daß

$$S_{n-1} > \tfrac{1}{2} S_n > \tfrac{1}{2} r$$

$$S_{n-2} > \tfrac{1}{2} S_{n-1} > \frac{1}{2^2} r$$

$$S_{n-3} > \tfrac{1}{2} S_{n-2} > \frac{1}{2^3} r$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$S_1 > \tfrac{1}{2} S_2 > \frac{1}{2^{n-1}} r$$

$$S > \tfrac{1}{2} S_1 > \frac{1}{2^n} r$$

$\tfrac{1}{2} S_1$ ist (nach a) die von einem Punkte in einem Schenkel des gegebenen Winkels, welcher in der Entfernung r vom Scheitel liegt, auf den anderen Schenkel gefällte Senkrechte, und S die Linie, welche beide Schenkel in der Entfernung r vom Scheitel verbindet. Jede dieser beiden Linien ist also größer als $\frac{1}{2^n} r$, und wenn man $r = 2^n a$ macht, auch größer als a; d. h. bei jedem Winkel, dessen 2^nfaches $\geqq R$ ist, muß schon die von einem Punkt, welcher in dem einen Schenkel in der Entfernung $2^n a$ vom Scheitel liegt, auf den anderen Schenkel gefällte Senkrechte, um so mehr also jede andere nach diesem Schenkel gezogene Linie größer sein als die gegebene Linie a.

Der zweite Theil der Behauptung, daß nämlich ein Punkt in dem einen Schenkel immer entfernt genug vom Scheitel genommen werden könne, daß die von ihm auf den anderen Schenkel gefällte Senkrechte von diesem ein Stück abschneide, welches größer sei wie jede gegebene Linie, läßt sich nicht beweisen.

IV.

Wir haben im Vorhergehenden nachgewiesen, daß die bis jetzt bekannten Beweise unserer sieben Sätze und ihrer Zusätze entweder unvollständig oder unbefriedigend sind, insofern sie entweder die Behauptung derselben nur zum Theile begründen, oder diese Begründung nur durch einen Schluß vom Besonderen aufs Allgemeine oder durch einen Zirkel im Schließen ermöglichen. Wenn aber auch durch den Beweis unseres Satzes 4 durch Fußpunktsenkrechte, welcher zuerst von Clavius gegeben und von Hoffmann vervollständigt wurde, und durch den Beweis Legendre's über die Winkelsumme im Dreieck nicht ihre ersten Erfinder allein getäuscht wurden, so konnte doch die Erkenntniß der Trugschlüsse, durch welche sie für erbracht gehalten wurden, und mit ihr die Ueberzeugung, daß eine direkte Begründung dieser Sätze unmöglich sei, nicht lange ausbleiben. Hieraus gingen wieder die Versuche hervor dieses Ziel auf einem Umwege mit Hülfe neuer Sätze zu erreichen. Obgleich man scheinbar sehr verschiedene Wege einschlug, so fand man doch Sätze, welche nicht nur unter sich, sondern auch mit den vorhergehenden eng zusammenhängen, welche daher auch zum Beweise der früheren Sätze führen müßten, wenn sie selbst sich begründen ließen. Diese neuen Sätze lassen sich analytisch aus dem Satze entwickeln: Wenn zwei von einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte ungleich sind, so nähern sich beide Linien nach der Seite der kleineren Senkrechten und entfernen sich nach der entgegengesetzten Seite hin. Ich will die Sätze hier zuerst genetisch geordnet im Anschlusse an die obigen aufführen und zugleich bei jedem einzelnen die Abhängigkeit desselben von den vorhergehenden, so wie umgekehrt dieser letzteren von jenen nachweisen, über die Wege aber, auf welchen sie gefunden wurden, und über ihre unbedingten Beweise erst im folgenden Abschnitte sprechen.

8r Satz. **Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten einander gleich, so muß ihnen auch jede andere von der ersten auf die zweite Linie gefällte Senkrechte gleich sein.**

Bei vorausgesetzter Richtigkeit der ersten sieben Sätze folgt der Beweis aus 1 und 2 sehr leicht; oder auch aus 1 allein, wenn man in jeder der beiden geraden Linien auf derselben Seite derselben Senkrechten einen Punkt nimmt und beide Punkte durch eine gerade Linie verbindet.

Auch folgt umgekehrt 1 aus unserem Satze 8. Wir haben oben bei dem Versuche den Satz 1 unbedingt zu beweisen (p. 9) gefunden, daß zwei von einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte, wenn sie gleich sind, mit der ersten Linie immer gleiche innere Gegenwinkel bilden müssen. Fällt man nun zwischen den beiden gleichen Senkrechten des ersten Satzes noch eine dritte von der ersten geraden Linie auf die zweite, so muß (nach 8) diese Senkrechte jeder der beiden ersten gleich sein. Nach dem oben angeführten Beweise bilden je zwei von diesen Senkrechten mit der ersten Linie gleiche Gegenwinkel; daher sind diese vier Winkel alle einander gleich; weil aber zwei von ihnen, welche die mittlere Senkrechte mit der ersten geraden Linie bildet, Nebenwinkel, also wegen ihrer Gleichheit rechte Winkel sind, müssen auch die beiden anderen Winkel, welche die äußeren Senkrechten mit der ersten Linie bilden, rechte Winkel sein.

9r Satz. **Sind die von drei Punkten, welche auf derselben Seite einer geraden Linie liegen, auf die letztere gefällten Senkrechten einander gleich, so geht jede durch zwei beliebige dieser Punkte gezogene gerade Linie auch durch den dritten.**

Beweis aus 1. Die beiden Verbindungslinien des mittleren Punktes mit jedem der beiden äußeren müssen (nach 1) mit der mittleren Senkrechten rechte Winkel bilden, also in dieselbe Linie fallen.

Beweis aus 8. Läge der mittlere Punkt nicht in der Verbindungslinie der beiden äußeren, so müßte die von ihm auf jene erste gerade Linie gefällte Senkrechte entweder selbst die Verbindungslinie schneiden, oder es müßte dies ihre Verlängerung thun, weil die dritte Senkrechte jeder der beiden ersten parallel ist, d. h. es müßte die mittlere von der geraden Verbindungslinie auf die andere gerade Linie gefällte Senkrechte größer oder kleiner sein als jede der beiden gleichen äußeren; was im Widerspruch mit 8 steht.

Beweis von 1 aus 9. Man errichte zwischen den beiden von der ersten geraden Linie auf die zweite gefällten Senkrechten des ersten Satzes auf die zweite gerade Linie eine Senkrechte und mache diese einer der beiden ersten gleich. Da dann der Endpunkt dieser Senkrechten (nach 9) in die erste gerade Linie fallen muß, so ist der weitere Beweis derselbe wie der von 1 aus 8.

Beweis von 8 aus 9. Wäre die von einem dritten Punkte der ersten geraden Linie auf die zweite gefällte Senkrechte nicht jeder der beiden ersten gleichen Senkrechten gleich, so könnte man auf der dritten, wenn es nöthig sein sollte, verlängerten Senkrechten von ihrem Fußpunkt an ein Stück abschneiden, welches jeder der beiden ersten Senkrechten gleich wäre. Durch dessen Endpunkt und die Endpunkte der beiden ersten Senkrechten müßte sich dann nach 9 eine zweite gerade Linie ziehen lassen.

10r Satz. Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten gleich, und liegt ein dritter Punkt auf derselben Seite der zweiten Linie wie die erste, aber nicht in der letzteren, so muß die von ihm auf die zweite gerade Linie gefällte dritte Senkrechte kleiner oder größer sein als jede der beiden ersten, je nachdem er zwischen beiden geraden Linien oder außerhalb derselben liegt.

Beweis aus 1 und 4 leicht.

Beweis aus 9. Macht man die dritte Senkrechte, wo nöthig durch Verlängerung, jeder der beiden ersteren gleich und nennt die so erhaltene, mit der dritten Senkrechten zusammenfallende Linie die vierte Senkrechte, so muß (nach 9) der Endpunkt dieser vierten Senkrechten in der ersten geraden Linie liegen. Liegt nun der dritte Punkt, d. h. der Endpunkt unserer dritten Senkrechten, zwischen beiden geraden Linien, also auch zwischen den Endpunkten der diese Linien verbindenden vierten Senkrechten, so ist die dritte Senkrechte ein Theil der vierten, also auch kleiner wie diese und wie jede der beiden ersten. Liegt aber der Endpunkt unserer dritten Senkrechten außerhalb der beiden geraden Linien, so muß er auch außerhalb der Endpunkte der diese Linien verbindenden vierten Senkrechten liegen, d. h. die vierte Senkrechte muß ein Theil der dritten, also die letztere auch größer sein wie jede der beiden ersten.

9 folgt indirekt aus 10.

Zusatz zu 10. Die drei Eckpunkte eines Dreiecks können nicht gleichweit von einer geraden Linie entfernt sein.

11r Satz. Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten einander gleich, ist aber die von einem dritten Punkte, welcher auf derselben Seite der zweiten Linie liegt wie die erste, auf die zweite Linie gefällte Senkrechte größer oder kleiner als jede der beiden gleichen ersten, so kann dieser dritte Punkt nicht in der ersten geraden Linie liegen, und zwar muß er zwischen beide gerade Linien oder außerhalb derselben fallen, je nachdem die dritte Senkrechte kleiner oder größer ist als jede der beiden anderen.

Der Beweis läßt sich aus 1 und 3 oder indirekt aus 9 und 10 sehr leicht führen.

Der direkte Beweis aus 9 allein ist mit geringen Veränderungen übereinstimmend mit dem oben gegebenen des Satzes 10 aus 9.

Beweis aus 8. Man macht die erste, wenn es nöthig sein sollte, verlängerte Senkrechte gleich der dritten und verbindet die Endpunkte beider durch eine gerade Linie. Alle Punkte dieser Verbindungslinie müssen (nach 8) entweder einen kleineren oder einen größeren Abstand von der zweiten geraden Linie haben wie die erste Linie, je nachdem die dritte Senkrechte kleiner oder größer ist als eine der ersten, d. h. die Verbindungslinie, also auch der in ihr liegende Endpunkt der dritten Senkrechten muß im ersten Falle ganz zwischen die beiden geraden Linien, im zweiten aber ganz außerhalb derselben fallen.

8 folgt indirekt aus 11.

12r Satz. Sind zwei von einer geraden Linie auf eine zweite gefällte Senkrechte ungleich, und ist eine dritte Senkrechte auf der zweiten geraden Linie einer der beiden ersteren gleich, so muß der Endpunkt dieser dritten Senkrechten zwischen beide gerade Linien oder außerhalb derselben fallen, je nachdem diese Senkrechte selbst von der ihr gleichen Senkrechten in der von der kleineren zur größeren Senkrechten gehenden oder in der entgegengesetzten Richtung liegt.

Beweis aus 1 und 3 leicht.

Beweis aus 11 und 10. Es sei zuerst die dritte Senkrechte der kleineren von den beiden ersten gleich. Verbindet man die Endpunkte der beiden gleichen Senkrechten, so muß nach (11) der Endpunkt der größeren Senkrechten, und dann auch der ganze Zweig unserer ersten geraden Linie, welcher vom Endpunkte der kleineren Senkrechten nach dem der größeren hin ins Unendliche geht, über dieser Verbindungslinie liegen, weil zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte treffen können. Der andere nach der entgegengesetzten Richtung laufende Zweig dieser ersten Linie kann (nach 11) nicht in die Verbindungslinie fallen; er kann aber auch nicht über dieselbe sich erheben, denn sonst müßten (nach 10) die Entfernungen der Punkte beider Zweige unserer ersten geraden Linie von der zweiten vom Endpunkt der kleineren Senkrechten an zugleich größer werden, und dann auch nothwendig unter diesen Entfernungen sich gleiche finden, was nach 11 oder dem Begriffe der geraden Linie unmöglich ist. Daher muß dieser zweite Zweig unserer ersten Linie im Endpunkte der kleineren Senkrechten unter die Verbindungslinie treten und dann auch in seinem ganzen Verlaufe unter ihr bleiben, weil er sonst die Verbindungslinie noch einmal schneiden würde. Ist aber die dritte Senkrechte der größeren von den beiden ersten gleich, so braucht man nur die Endpunkte der beiden gleichen Senkrechten durch eine gerade Linie zu verbinden, um wie oben zu finden, daß der Endpunkt der kleineren Senkrechten zwischen diese Verbindungslinie und die zweite gerade Linie, und daher auch der Zweig der ersten Linie, welcher vom Endpunkte der größeren Senkrechten nach dem der kleineren hin ins Unendliche geht, unter diese Verbindungslinie fallen, der entgegengesetzte Zweig unserer Linie dagegen im Endpunkte der größeren Senkrechten über die Verbindungslinie sich erheben und dann auch stets über derselben bleiben muß.

8 folgt indirekt und 11 direkt sehr leicht aus 12.

13r Satz. Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten ungleich, so ist jede dritte von der ersten auf die zweite Linie gefällte Senkrechte kleiner oder größer wie eine der beiden ersten, je nachdem sie von ihr in der von der größeren zur kleineren Senkrechten gehenden oder in der entgegengesetzten Richtung liegt.

Beweis aus 3 und 4 leicht.

Beweis aus 12 und 10. Trägt man auf der größeren Senkrechten vom Fußpunkt an ein Stück ab, welches der kleineren, und auf der verlängerten kleineren, ein Stück, welches der größeren Senkrechten gleich ist, und verbindet den Endpunkt eines jeden dieser Stücke mit dem der ihm gleichen Senkrechten, so muß der Zweig unserer ersten geraden Linie, welcher in der von der größeren zur kleineren Senkrechten gehenden Richtung liegt, durch deren Endpunkte eine unserer Verbindungslinien geht (nach Satz 12), unter dieser, der andere Zweig aber über derselben liegen.

Daher müssen auch nach 10 die Entfernungen der Punkte des ersten Zweiges von der zweiten geraden Linie kleiner, die der Punkte des anderen Zweiges aber größer sein als die Senkrechte, durch deren Endpunkt die Verbindungslinie gezogen wurde.

Der Satz 8 folgt aus 13 indirekt.

14r Satz. Sind die von zwei Punkten einer geraden Linie auf eine zweite gefällten Senkrechten ungleich, so werden die von der ersten Linie auf die zweite gefällten Senkrechten immer kleiner, wenn sie in der Richtung von der größeren zur kleineren Senkrechten, größer aber, wenn sie in der entgegengesetzten Richtung auf einander folgen.

Beweis durch wiederholte Anwendung von 13.

V.

Diese 14 Sätze finden sich, wie ich oben schon gesagt habe, in den einzelnen Parallelentheorieen zerstreut, aber keineswegs alle so bestimmt formulirt, wie ich sie hier gegeben habe, sondern im Gegentheil oft nur sehr unbestimmt angedeutet. Dies gilt in der ersten Gruppe namentlich vom Satze 6, von welchem Legendre (siehe oben die Anmerkung zu unserem unmittelbaren Beweise des Satzes 6) und Andere nur gelegentlich einen sehr speciellen Fall angeben. Bei der Verallgemeinerung des Beweises für den Euklid'schen elften Grundsatz, welchen sie vorher für den Fall, daß die eine von zwei Geraden senkrecht, die andere schief gegen dieselbe dritte Linie stehe, bewiesen haben oder vielmehr bewiesen zu haben glauben, suchen sie nämlich zu zeigen, daß, wenn zwei gerade Linien mit einer dritten sie schneidenden nach einer Seite hin innere Gegenwinkel bilden, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind, es dann immer auch eine zweite schneidende Linie gibt, welche nach derselben Seite hin mit der einen der durchschnittenen Linien einen rechten, mit der anderen aber einen spitzen Winkel bildet. Auch den Satz 7 habe ich nur in Formen gefunden, welche unserem ersten Zusatz zu demselben entsprechen. In der zweiten Gruppe sind die Sätze 10 bis 14 mit Ausnahme des Zusatzes zu 10 von mir zuerst aufgestellt. Ich wurde dazu veranlaßt durch Hindeutungen in den Beweisen, welche man für die Sätze 1 und 2 oder 8 und 9 suchte. Denn daß man mit Hülfe unserer letzten 7 Sätze die ersten zu beweisen suchte, habe ich schon gesagt. Dies hieße aber doch voraussetzen, daß sich wenigstens einer dieser letzten Sätze unbedingt, d. h. nur gestützt auf unbestrittene Voraussetzungen, mögen dies nun richtige Definitionen, wirkliche Grundsätze oder vorher aus diesen bewiesene Lehrsätze sein, begründen ließe. Für die ersten sieben Sätze gibt es, wie wir oben gesehen haben, solche Beweise, welche zwar die Behauptung nicht in allen Punkten begründen, aber doch, so weit sie dies thun, sich nur auf unbestrittene Voraussetzungen stützen. Einen solchen unbedingten, wenn auch nur unvollständigen Beweis eines unserer letzten Sätze kenne ich nicht. Die sogenannten Beweise derselben, welchen man in den Parallelentheorieen begegnet, sind nur Umschreibungen des zu beweisenden Satzes oder setzen einen anderen unserer Sätze als Grundsatz voraus.

Es ist hauptsächlich der neunte, doch mitunter auch der achte Satz, welchen man auf diese Art zu beweisen suchte.

Clavius z. B. nimmt den Satz 9 als Grundsatz an. Er sagt nämlich: „Wenn alle Punkte einer Linie „AB von einer geraden DC gleichweit abstehen, so wird AB eine gerade Linie sein."

„Dies kann nämlich aus der Erklärung einer geraden Linie klar hergeleitet werden. Denn wenn alle „Punkte der Linie AB von der geraden DC gleichweit abstehen, so wird kein Zwischenraum in ihr zu finden sein, „der von den beiden Endpunkten sich aufwärts oder abwärts entfernt oder nach einer anderen Richtung abweicht. „Man wird nichts gebogenes in ihr antreffen, sondern sie muß sich gleichförmig von einem Punkte zum anderen „erstrecken, wie die gerade DC.

„Wenn diese AB nicht gerade wäre, so hätten alle Punkte derselben nicht einerlei „Abstand von DC, welches gegen die Annahme ist. u. s. w.

Nachdem er seinen zweiten Satz:

„Wenn eine gerade Linie mit ihrem einen Endpunkte über eine andere gerade derge„stalt der Quere nach hinbewegt wird, daß sie immer mit derselben einen rechten Winkel „bildet, so wird der andere Endpunkt auch eine gerade Linie beschreiben," aus dem ersten bewiesen hat, sagt er weiter:

„Auch aus der Erklärung einer geraden Linie folgt dies schon. Wenn nämlich die zwei Punkte D und A „(die Endpunkte der Senkrechten) auf eine ähnliche, gleichförmige Art bewegt werden, so werden sie auch ähnliche „Linien beschreiben; . . . denn man kann sich nicht denken, daß die Endpunkte einer geraden Linie, welche sich „auf eine gleichförmige Art bewegt, zwei Linien hervorbrächten, die von verschiedener Art wären." . . .

Daß die hier gegebenen Umschreibungen des Lehrsatzes keine Beweise sind, gesteht Clavius selbst dadurch, daß er, nachdem er den Satz 2 mit Hülfe von 9 bewiesen hat, gleich darauf den von 9 unabhängigen Beweis des Satzes 2 durch Fußpunktsenkrechte gibt, welchen wir oben schon kennen gelernt haben.

Der mit den Worten: „Wenn die AB nicht gerade wäre" u. s. w. angedeutete indirekte Beweis ließe sich allerdings führen, wenn unser Satz 10 vorher bewiesen wäre.

Viele andere Versuche den Satz 9 zu beweisen habe ich im Folgenden möglichst kurz zusammenzufassen gesucht.

Man denke sich auf die oben von Clavius angegebene Weise eine Linie gebildet, welche von einer geraden Linie in allen ihren Punkten gleichen Abstand hat. Wir wollen sie Linie der Endpunkte nennen, da sie gebildet wird durch den bewegten Endpunkt der an der geraden Linie hingeschobenen Senkrechten, deren Anfangspunkt immer in der geraden Linie liegen bleibt. Um nun zu beweisen, daß die Linie der Endpunkte eine gerade Linie sei, näherte man eine der beiden Linien der anderen bis zum Zusammenfallen des Anfangs- und des Endpunkts einer der unendlich vielen gleichen Senkrechten und schloß, ohne immer die Art der Annäherung genau anzugeben, daß dann auch die Anfangs- und die Endpunkte aller dieser Senkrechten, d. h. die ganzen Linien zusammenfallen müßten. Wir wollen sehen, mit welchem Rechte dies geschlossen wird.

Rückt man eine der Linien gegen die andere, so kann dies entweder so geschehen, daß die bewegte Linie mit derselben Senkrechten immer gleiche Winkel bildet, oder so, daß die Puntte, in welchen sie in jeder ihrer Lagen zwei Senkrechte schneidet, von den Anfangs- oder den Endpunkten ihrer Senkrechten gleichweit entfernt sind. In allen Fällen aber dürfen wir nur dann schließen, daß die bewegte und die ruhende Linie sich decken müssen, wenn wir nachweisen können, daß alle Punkte, in welchen die unendlich vielen gleichen Senkrechten durch die bewegte Linie geschnitten werden, von den Anfangs- oder Endpunkten ihrer Senkrechten gleichweit entfernt liegen; d. h. wir müssen, wenn die gegebene gerade Linie an einer Senkrechten so hingeschoben wird, daß sie mit ihr immer rechte Winkel bildet, den Satz 2, und wenn sie so der Linie der Endpunkte genähert wird, daß sie in jeder Lage durch von den Endpunkten gleich weit entfernte Theilpunkte der nämlichen zwei Senkrechten geht, den Satz 1 und 2 voraussetzen. Wenn aber die Linie der Endpunkte bewegt wird, so reicht diese Voraussetzung nicht einmal hin; wir müssen, um nur die Sätze 1 und 2 anwenden zu können, erst wissen, daß die Linie der Endpunkte selbst eine gerade ist; wir müssen also auch noch den zu beweisenden Satz voraussetzen.

Kircher stützt den Beweis des Satzes 9 auf den Zusatz zu 10, den er mit folgenden Worten zu beweisen sucht.

„Es ist unläugbar, daß die drei Scheitelpunkte eines Dreiecks nicht in gerader Linie liegen, und daß sie „ungleich von einer geraden Linie entfernt sind. Denn wenn man die Grundlinie eines Dreiecks auf die gerade

„Linie legt, so ist ihre Entfernung an den Endpunkten von der geraden Linie gleich Null. Da sich aber die „Spitze immer über der Grundlinie befindet, so muß dieselbe von der Grundlinie oder der geraden Linie immer „irgend einen Abstand haben."

Dies ist richtig. Aber die Behauptung bedarf doch wohl eines Beweises, daß keine andere gerade Linie, welche von den Endpunkten der Grundlinie eines Dreiecks gleichweit entfernt ist, auch ebenso weit von der Spitze entfernt sein könne.

Daß man den Beweis des Satzes 9 leicht indirekt führen kann, wenn man den Zusatz zu 10 ohne Beweis als wahr annehmen will, brauche ich wohl kaum zu sagen.

Simson stellt, um den Satz 8 zu beweisen, den zwölften oder vierzehnten und den elften unserer Sätze als Grundsätze mit folgenden Worten nicht sehr bestimmt auf.

„Eine gerade Linie kann nicht anfangs sich einer anderen geraden Linie nähern und dann von derselben sich „entfernen, ehe sie dieselbe durchschneidet, und auf dieselbe Weise kann sich eine gerade Linie nicht von einer „anderen entfernen und dann sich derselben nähern (Satz 12 oder 14); eben so kann auch keine gerade Linie von einer „anderen immer die nämliche Entfernung halten und dann sich derselben nähern oder von ihr entfernen (Satz 11)". Daß mit Hülfe der Sätze 11 und 12 (oder 14) der Satz 8 leicht indirekt sich beweisen läßt, haben wir oben schon gesagt.

Diejenigen, welche, wenn auch nicht immer so offen wie Simson, einen oder mehrere unserer Sätze als Grundsätze, d. h. als Sätze, die keines Beweises bedürfen, annehmen, um mit deren Hülfe die anderen zu beweisen, haben den engen Zusammenhang, die gegenseitige Abhängigkeit unserer oben aufgestellten 14 Sätze nicht erkannt. Darum haben wir oben gezeigt, daß bei vorausgesetzter Richtigkeit irgend eines der Sätze aus einer der beiden Gruppen die Begründung eines jeden anderen aus seiner sowohl, als aus der anderen Gruppe leicht sei, daß also alle diese Sätze ein vollkommen gleiches Gewicht haben. Hieraus folgt aber, daß wir eben so gut und eben so wenig berechtigt sind den einen wie den anderen dieser Sätze, ja wie jeden beliebigen anderen geometrischen Satz als Grundsatz anzunehmen. Nun haben wir aber nachgewiesen, daß keiner dieser Sätze ohne eine solche Annahme bewiesen werden kann. Daher müssen wir auch alle die Versuche die Parallelentheorie mit Hülfe eines dieser Sätze zu begründen als mißlungen ansehen.

VI.

Es erübrigt uns noch zu zeigen, wie Diejenigen, welche einen oder mehrere unserer 14 Sätze als erwiesen annehmen, die IV Hauptsätze der Parallelentheorie (S. Abschnitt I) begründen.

Betrachten wir zunächst die Beweise des Satzes I.

Mit Hülfe des Satzes 5 läßt sich derselbe leicht indirekt beweisen. Wenn nämlich zwei gerade Linien sich schnitten, welche mit einer und also auch (nach 5) mit jeder sie durchschneidenden Linie gleiche correspondirende Winkel bilden, so müßten sie auch mit jeder durch ihren Durchschnittspunkt gezogenen Linie auf derselben Seite gleiche Winkel bilden.

Ein sehr einfacher Beweis für den besonderen Fall des Satzes I, wo beide durchschnittene Linien auf der schneidenden senkrecht stehen, ergibt sich aus unserem Satze 2. Denn nach ihm sind zwei gerade Linien, welche auf derselben dritten senkrecht stehen, überall gleichweit von einander entfernt, können sich also auch nicht schneiden.

Den ersten dieser Beweise habe ich bei keinem von denen gefunden, welche mit Hülfe eines oder mehrerer unserer 14 Sätze die Parallelentheorie zu begründen suchen. Dies erklärt sich aber leicht daraus, daß auch der Satz 5 selbst von ihnen nie bestimmt aufgestellt, sondern nur gelegentlich einigemale erwähnt wird. Auffallender ist, daß man auch dem zweiten der obigen Beweise des Satzes I so selten begegnet, da doch der Satz 2, auf den er sich stützt, fast in allen jenen Paralleltheorieen aufgestellt wird. Hatten etwa selbst die, welche jene Sätze aufstellten, zu ihrer Begründung derselben so wenig Zutrauen, daß sie es, wo es anging, vorzogen von denselben unabhängige Beweise zu führen? Es läßt sich aber noch auf eine andere Weise erklären, warum sie wenigstens einem der unbedingten, auf unbestrittenen Voraussetzungen fußenden Beweise des Satzes I vor jenem einfachen aus ihrem Satze 2 hergeleiteten den Vorzug gaben.

Diejenigen, welche unsere 14 Sätze, selbst bei vorausgesetzter Richtigkeit eines derselben, begründen wollten, mußten, wie wir oben gesehen haben, nicht nur die Beweise der Sätze über die Congruenz und Nichtcongruenz der Dreiecke voraussetzen, sondern auch von den Sätzen über die Winkel derselben wenigstens den Beweis des Satzes: a) der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer wie jeder innere ihm nicht anliegende Winkel desselben; und den des daraus folgenden b) zwei innere Winkel eines Dreiecks sind zusammen immer kleiner als 2R; d. h. sie mußten die im Abschnitt I erwähnte Euklid'sche Anordnung der Sätze der Geometrie entweder ganz oder doch mit nur unwesentlichen Aenderungen beibehalten. Da sie also auch den Satz IV der Parallelentheorie in der Form des eben angeführten Satzes a zuerst beweisen mußten, so lag es ihnen am nächsten den Satz I ebenso wie Euklid indirekt mit Hülfe des Satzes IV zu begründen. Dasselbe thun eigentlich auch Diejenigen, welche wie Legendre den Beweis des besonderen Falles des Satzes I, wo beide durchschnittene Linien auf der schneidenden senkrecht stehen, auf den Satz stützen: Von einem Punkte, der außerhalb einer geraden Linie liegt, läßt sich auf diese nur eine Senkrechte fällen; denn dieser Satz folgt unmittelbar aus dem oben angeführten b.

Endlich gibt es noch einen indirekten, unbedingten Beweis des Satzes I, welcher nur die Sätze über die Winkel voraussetzt und daher von den neueren, die Sätze der Geometrie genetisch entwickelnden Mathematikern meist angewandt wird. Mit Hülfe des Satzes ♁ im Abschnitt I läßt sich nämlich leicht zeigen, daß die von der schneidenden Linie und den durch sie gebildeten Theilen der durchschnittenen Linien begränzten beiden Gürtel congruent sind; woraus zunächst folgt, daß die beiden durchschnittenen geraden Linien sich entweder in zwei Punkten schneiden müssen oder gar nicht schneiden können, und dann, daß das letztere stattfinden muß, weil das erstere unmöglich ist.

Den Euklidianern liegt dieser Beweis eigentlich fern. Einen entsprechenden Beweis des schon mehr erwähnten besonderen Falles des Satzes I hat, so viel ich weiß, nur Hoffmann gegeben, wobei er natürlich den Satz ♁ nicht nöthig hatte. Er mußte aber ebenso wie alle die, welche den Beweis dieses besonderen Falles gegeben haben, um denselben auf den allgemeinen Satz zurückzuführen, den Satz beweisen: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten sie schneidenden gleiche correspondirende Winkel bilden, so gibt es auch immer eine zweite schneidende Linie, welche auf beiden durchschnittenen senkrecht steht. Dazu braucht man aber entweder den Satz 5 selbst oder seinen Zusatz oder, wenn man diese nicht voraussetzen will, die Sätze von der Congruenz der Dreiecke, wie wir oben bei den Beweisen des Satzes 5 gesehen haben.

Einen anderen hierher gehörigen Beweis des Satzes IV als den Euklid'schen kenne ich nicht.

Daß es bis jetzt keinem in Euklid'schen Anschauungen stehenden Mathematiker gelungen ist einen der Hauptsätze II oder III der Parallelentheorie unbedingt zu beweisen, habe ich schon oben gesagt. Setzt man aber die Richtigkeit eines unserer 14 oben entwickelten Sätze voraus, so fehlt es nicht an Wegen zur Begründung des Satzes II, d. i. des Euklid'schen elften Grundsatzes. Der Vollständigkeit wegen will ich die einfachsten, am meisten betretenen angeben.

Man beweist gewöhnlich einen besonderen Fall des Satzes II und muß deßhalb auch den Beweis des folgenden Satzes geben: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten sie schneidenden nach einer Richtung innere Gegenwinkel bilden, welche kleiner als 2 R sind, so gibt es auch immer eine zweite schneidende, welche mit derselben Richtung der durchschnittenen Linien innere Gegenwinkel bildet, von welchen der eine ein rechter, der andere ein spitzer Winkel ist.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze 6, leicht auch aus dem Zusatze zu 5. Einen von diesen Sätzen unabhängigen Beweis desselben habe ich oben bei der Besprechung des unbedingten Beweises des Satzes 6 gegeben (Abschnitt III).

Der besondere Fall des Satzes II, welcher mit Hülfe eines oder mehrerer der gegebenen 14 Sätze bewiesen worden ist, heißt: Jede gerade Linie, welche senkrecht auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels steht, schneidet den anderen Schenkel.

Von den Beweisen dieses Satzes stimmen die beiden ersten in so fern überein, als in beiden eine der durchschnittenen Linien in ein Dreieck eingeschlossen wird. Dieses Dreieck wird im Legendre'schen Beweise, den wir zuerst mittheilen wollen, (Fig. 5) von der Senkrechten XD, von dem von ihr abgeschnittenen Stücke AD des einen Schenkels des spitzen Winkels DAC und von einer dritten durch den Scheitel desselben (A) und einen in der Senkrechten liegenden Punkt (X) gezogenen Linie begränzt. Gelingt es diesen Punkt (X) so zu bestimmen, daß die Linie AC, welche den anderen Schenkel des gegebenen spitzen Winkels bildet, in den Winkel (DAX) fällt, durch dessen Scheitel sie geht, so muß sie auch jede die Schenkel des Winkels (DAX) verbindende Linie, also auch die Senkrechte DX zwischen ihren Endpunkten D, X durchschneiden.

Eine solche Bestimmung des Punktes X wird aber möglich, wenn wir den Zusatz zu 5 oder den ihm gleichwerthigen Satz (w): der Außenwinkel eines Dreiecks ist eben so groß als die beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel zusammen genommen, als richtig voraussetzen. Macht man nämlich $DL = DA$, $LM = LA$, $MP = MA$ u. s. f. und verbindet L, M, P etc. mit A, so sind in den gleichschenkligen Dreiecken DLA, MLA, PMA etc., welche man dadurch erhält, die Winkel an der Grundlinie gleich, also $\lambda = \alpha$, $\beta = \mu$, $\gamma = \pi$ etc. Nach dem eben angeführten Satze (w) ist nun $R = \varrho = \alpha + \lambda = 2\alpha$; $\lambda = \mu + \beta = 2\beta$; $\mu = \pi + \gamma = 2\gamma$, und daher $\alpha = \lambda = \frac{1}{2}R$; $\beta = \mu = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{4}R$, $\gamma = \pi = \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{8}R$, und endlich $\alpha = \frac{1}{2}R$; $\alpha + \beta = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})R = \frac{3}{4}R$; $\alpha + \beta + \gamma = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})R = \frac{7}{8}R = R - \frac{1}{2^3}R$.

Hieraus ersieht man, daß, wenn man die Bildung dieser gleichschenkligen Dreiecke auf die angegebene Weise fortsetzt, der Winkel bei A im n^{ten} Dreiecke gleich $\frac{2^n - 1}{2^n}R = R - \frac{1}{2^n}R$ werden muß.

Setzt man nun $AD = l$, so ist

im Dreiecke	ADL	die dem Winkel	$\alpha = \frac{1}{2}R$	gegenüberliegende Kathete $= l$,	die Hypotenuse $< 2l$
„ „	ADM	„ „ „	$\alpha + \beta = \frac{2^2-1}{2^2}R$	„ „ $< 3l$,	„ „ $< 2^2 l$
„ „	ADP	„ „ „	$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2^3-1}{2^3}R$	„ „ $< (2^3-1)\,l$,	die „ $< 2^3 l$
„ „	n	„ „ „	$\frac{2^n-1}{2^n}R$	„ „ $< (2^n-1)\,l$,	„ „ $< 2^n l$

Wie groß auch immer der spitze Winkel DAC sein, wie wenig er sich auch von einem rechten unterscheiden mag, so läßt sich doch immer n groß genug nehmen, daß $\frac{1}{2^n} R < R - DAC$, oder daß $DAC < R - \frac{1}{2^n} R$ wird. Trägt man daher auf DE von D aus ein Stück DX ab, welches gleich $(2^n - 1)$ l ist, und verbindet seinen Endpunkt mit A, so muß der Winkel DAX, welchen diese Verbindungslinie mit DA bildet, größer als $R - \frac{1}{2^n} R$, also um so mehr auch größer sein wie DAC, d. h. der Schenkel AC dieses kleineren Winkels muß innerhalb des größeren Winkels DAX liegen und daher auch die den letzteren begränzende Seite DX durchschneiden.

Zweiter Beweis. In den Beweisen von Tacquet und Nassareddin wird (Fig. 6 u. 7) der Versuch gemacht die auf dem einen Schenkel AB des spitzen Winkels Senkrechte ED in ein Dreieck CAF einzuschließen, welches von den beiden Schenkeln des spitzen Winkels und einer von einem Punkte des Schenkels AC auf AB gefällten Senkrechten CF begränzt wird.

Läßt sich dies ausführen, so muß auch die ED, wie jede gerade Linie, welche durch einen Punkt innerhalb eines Dreiecks geht, wenigstens zwei von den Seiten desselben durchschneiden. Da sie aber nach Satz 1 der Parallelentheorie mit der ebenfalls auf AB Senkrechten CF parallel ist, also diese nicht schneiden kann, so muß sie die AC durchschneiden.

Setzt man, wie Tacquet, den Zusatz zu 5 oder den oben angeführten gleichwerthigen Satz (w) voraus, so läßt sich (Fig. 6) CF mit Hülfe des von uns unbedingt bewiesenen Theiles des zweiten Zusatzes zu 7 leicht finden. Errichtet man auf AB im Scheitel A eine Senkrechte AG, sucht dann (nach 7, Zusatz 2) im Schenkel AC des Winkels β einen Punkt, der so liegt, daß die von ihm auf den anderen Schenkel AG gefällte Senkrechte größer wird wie AD, und zieht diese Senkrechte (CG), macht endlich $AF = CG$ und verbindet C mit F, so ist (nach w) $R = \varrho = \beta + \gamma = \alpha + \beta$, also $\alpha = \gamma$, und daher sind die Dreiecke ACG und ACF congruent, und also Winkel $CFA = CGA = R$, d. h. die Linie CF steht senkrecht auf AB und ist deshalb auch der ED parallel. AF ist aber größer als AD, weil die ihr gleiche $CG > AD$ ist, daher schließt die CF auch die ED in ein Dreieck ein.

Nassareddin setzt den Zusatz 1 zu 7 voraus. Fällt man (Fig. 7) von irgend einem Punkte K des Schenkels AC eine Senkrechte KL auf den anderen Schenkel AB des spitzen Winkels (α), macht $AF = n \cdot AL > AD$, $AC = n \cdot AK$ und verbindet C mit F, so hat man nur zu beweisen, daß CF senkrecht auf AB stehen muß. Fällt man zu diesem Zwecke von C aus eine Senkrechte CM auf AB, so ist nach 7 Zusatz 1:

$$AK : AL = AC : AM,$$

nach unserer Construktion aber auch:

$$AK : AL = AC : AF,$$

und daher $AF = AM$, d. h. die Senkrechte CM fällt mit der CF zusammen, oder CF steht selbst senkrecht auf AB.

Wollte man den unbewiesenen Theil des zweiten Zusatzes zu 7 voraussetzen, so brauchte man in dem Schenkel AC nur einen Punkt C anzunehmen, der so liegt, daß die von ihm auf den anderen Schenkel gefällte Senkrechte (CF) von dem letzteren ein Stück abschneidet, welches größer als AD ist.

Dritter Beweis. Ein neuer Beweis des allgemeinen Satzes, den ich hier zuerst gebe, läßt sich unter Voraussetzung der Richtigkeit des Satzes 7 also führen. Bilden (Fig. 8) die durchschnittenen Linien AB und CD mit der schneidenden AC nach rechts innere Gegenwinkel, α, γ, welche zusammen kleiner als zwei Rechte sind, und sind ferner von den nach rechts aufeinanderfolgenden, unter sich gleichweit entfernten Punkten E, F, G . . . der

Linie CD die Senkrechten EL, FM, GN etc. auf AB gefällt, so nehmen nach 7 diese aufeinanderfolgenden Senkrechten um gleich viel ab und schneiden auch auf AB gleiche Stücke ab. Nennt man die Senkrechten EL, FH, GN von links nach rechts S, S_1, S_2 . . . S_n, ihre Unterschiede $S - S_1 = S_1 - S_2 = \ldots = S_{n-1} - S_n = d$ und $LM = MN = \ldots = l$, so ist demnach

die 2te Senkrechte $S_1 = S - d$ und ihre Entfernung von EL in AB gemessen gleich l
„ 3te „ $S_2 = S - 2d$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $2l$
„ 4te „ $S_3 = S - 3d$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ $3l$
„ $(n+1)$te „ $S_n = S - nd$ „ „ „ „ „ „ „ „ „ nl

Mag nun auch S sehr groß und d sehr klein sein, so läßt sich doch n immer groß genug nehmen, daß nd gleich oder größer wie S, d. h. daß die $(n+1)$te Senkrechte $(S_n = S - nd)$ Null oder negativ wird.

Wird sie Null, so bedeutet dies, daß ihr in CD liegender Anfangspunkt P mit ihrem in AB liegenden Endpunkte P zusammenfällt, d. h. daß beide Linien AB und CD selbst im Punkte P, dessen Entfernung vom Endpunkte L der ersten Senkrechten gleich nl ist, zusammentreffen.

Wird aber die $(n+1)$te Senkrechte negativ, so bedeutet dies, daß sie selbst (wie KH), also auch ihr in CD liegender Anfangspunkt K unterhalb AB liegen muß. Da aber die in CD liegenden Anfangspunkte der früheren Senkrechten oberhalb AB lagen, so muß die Linie CD, ehe sie K erreicht, von der oberen zur unteren Seite der AB übergehen, d. h. sie muß die AB in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung von L kleiner als nl ist.

Vierter Beweis. Dieser Beweis stützt sich auf den Satz 2 und den bewiesenen Theil des Zusatzes 2 zu 7.

Es bilde (Fig. 9) AB mit BD einen rechten, mit AC einen spitzen Winkel. Errichtet man auf AB in A eine zweite Senkrechte AE, so müssen (nach 2) alle Punkte der ersten Senkrechten (BD) von der zweiten (AE) ebensoweit entfernt sein wie B von A. Da aber AC mit AE einen spitzen Winkel bildet, so gibt es nach 7 Zusatz 2 Punkte in der Linie AC, deren Entfernung von AE größer ist wie jede gegebene noch so große Linie, also auch größer wie AB. Ist G ein solcher Punkt, also $GE > AB$, so muß auch, weil $AB = DE$ ist, $GE > DE$ sein, und daher G weiter von AE entfernt liegen wie D, d. h. G muß auf der unteren Seite von BD liegen, während A auf der oberen liegt. Die Linie AG verbindet daher einen Punkt auf der einen Seite der Linie BD mit einem Punkte auf der anderen Seite derselben Linie und muß deßhalb diese Linie BD durchschneiden.

Diesen vierten Beweis trifft man häufig bei älteren Mathematikern, namentlich bei denen, welche gestützt auf Satz 9 Parallellinien als überall gleichabstehende gerade Linien definiren. Er stammt von Proclus, der jedoch die Hülfssätze als Axiome voraussetzt. Clavius, Simson, Kircher, Hoffmann und viele andere haben die Mängel desselben zu verbessern gesucht. Es ist dies auch Clavius und Hoffmann in sofern gelungen, als sie für den hier angewandten Theil des zweiten Zusatzes zu 7 unumstößliche Beweise lieferten. Alle Versuche aber den anderen Theil dieses Zusatzes zu beweisen sind, wie wir oben gesehen haben, mißglückt.

VII.

Wir würden sehr irren, wenn wir annehmen wollten, daß alle Bearbeiter der Parallelentheorie in derselben Richtung thätig gewesen und z. B. alle den Weg, welchen wir eben beschrieben haben, so lange gegangen wären, bis sie die feste Ueberzeugung gewonnen hätten, daß er nicht zum Ziele führe. Glücklicherweise ist dies weder hier, noch bei anderen Untersuchungen der Fall. Wohl benutzt der Nachfolger die Erfahrungen seines Vorgängers, aber meist doch nur, um die Wege, welche jenen nicht zum Ziele führten, zu vermeiden. Jeder sucht einen neuen

Weg zu entdecken und selbst, wenn er den Faden einer älteren Untersuchung wieder aufnimmt, ihn doch mit neuen Gesichtspunkten zu verweben. Neue und immer neue Wege werden gesucht, bis es endlich dem Glücklichen gelingt den zu finden, welcher zum lange vergeblich gesuchten Ziele führt.

So liefen auch neben den oben geschilderten Versuchen zur Begründung der Parallelentheorie andere her, welche wieder auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen diesem Ziele zustrebten. Auf dem einen suchte man neue Sätze, welche an sich so einfach und klar sein sollten, daß sie keines Beweises bedürften und daher als Grundsätze angenommen werden könnten, auf dem anderen neue Definitionen und zwar sowohl für die Begriffe der Parallelen und Convergenten als für andere damit zusammenhängende Begriffe.

Wir wollen zuerst untersuchen, ob die auf dem ersteren aufgefundenen Grundsätze wirklich als solche gelten können, oder ob sie doch wenigstens einfacher sind als der Euklid'sche.

Erste Gruppe.

Weder Kästner, welcher den Grundsatz des ersten oder letzten Schnitts aufstellte, noch andere, welche ihn anwandten, haben ihn als bestimmten Satz hingestellt. Sie alle haben Erklärung, Lehrsatz und Beweis gemischt. In folgender Fassung scheint er mir am bestimmtesten und kürzesten die Ansichten Kästners auszudrücken.

1) a. Grundsatz des letzten Schnitts.

Wenn man eine gerade Linie EG, welche (Fig. 10) die beiden Schenkel eines hohlen Winkels durchschneidet, an dem einen Schenkel in stets gleicher Neigung gegen denselben so hingeschoben denkt, daß ihre Durchschnittspunkte (E) auf ihm sich immer weiter vom Scheitel (A) entfernen, so müssen zwar ihre Durchschnittspunkte (F) auf dem anderen Schenkel (AB) sich ebenfalls immer weiter vom Scheitel (A) entfernen, aber keiner von diesen Punkten, wie weit er auch vom Scheitel entfernt liegen mag, läßt sich als der letzte Durchschnitt, d. i. als ein Punkt ansehen, in welchem die an dem einen Schenkel (AL) hingeschobene Linie (EG) den anderen Schenkel (AB) zuletzt trifft, so daß sie beim Weiterschieben nun gar nicht mehr mit ihm zum Durchschneiden kommen könnte.

1) b. Grundsatz des ersten Schnitts.

Wenn eine gerade Linie CD, welche den einen Schenkel AL eines hohlen Winkels (α) schneidet, dadurch daß man sie stets in gleicher Neigung gegen diesen Schenkel nach dem Scheitel (A) hinschiebt, in eine Lage (wie EG) kommen kann, wo sie den anderen Schenkel (AB) schneidet, so muß die bewegte Linie EG auch schon vorher, ehe sie in diese Lage kam, den Schenkel AB in Punkten geschnitten haben, welche weiter als F vom Scheitel A entfernt sind; von diesen Durchschnittspunkten läßt sich aber keiner, wie weit er auch vom Scheitel entfernt liegen mag, als der des ersten Durchschnitts, d. i. als Punkt ansehen, in welchem die bewegte Linie CD mit dem Schenkel AB zuerst zum Durchschnitt gekommen wäre, nachdem sie denselben vorher nicht hatte durchschneiden können.

Diese beiden Sätze wurden immer so sehr als gleichbedeutend gehalten, daß man sie nicht nur unter dem Namen „Grundsatz des ersten oder letzten Schnitts" als einen Satz bezeichnete, sondern sie auch in derselben Untersuchung miteinander vertauschte, und zwar mit vollem Rechte. Denn sie unterscheiden sich nur dadurch, daß in dem einen die bewegte Linie dem Scheitel A genähert, in dem anderen von ihm entfernt wird, sonst stimmen sie in Allem selbst bis auf die Form überein. In beiden wird vorausgesetzt, daß jeder der beiden Winkel β und γ größer wie α ist, weil β als Außenwinkel des Dreiecks EFA größer sein muß wie der innere ihm nicht anliegende Winkel α desselben, und daß daher auch die bewegte Linie, wenn sie bis zum Scheitel A von α hingeschoben wird, ganz außerhalb des Winkels α (wie AH) fallen muß; aus beiden wird gefolgert, daß die bewegte Linie, selbst wenn sie durch einen sehr weit vom Scheitel A entfernten Punkt des einen Schenkels AL geht, doch den anderen Schenkel AB schneiden müsse. Um das Letztere zu beweisen, zugleich aber auch um den von ihm aufgestellten Grundsatz des ersten Schnitts zu erläutern, sagt Kästner: „Man kann nicht annehmen, daß CD durch das

„erwähnte Herunterziehen (gegen A) in eine Lage gekommen sei, in welcher sie AB schneidet, ohne zugleich anzu„nehmen, sie habe die AB schon zuvor geschnitten, ehe sie in diese Lage gekommen ist. Denn sobald CD in eine „solche Lage wie EF kommt, so geht sie durch F verlängert unter AB durch, und die Punkte zwischen F und G „müssen also vor F durch AB gegangen sein." So setzt jeder Durchschnitt einen früheren voraus, keiner kann also als der erste angesehen werden. Nun sind aber in Hinsicht auf das Durchschneiden der CD mit AB nur zwei Annahmen möglich; entweder hat die CD in ihrer ursprünglichen Lage schon die AB durchschnitten, oder CD hat in dieser Lage die AB nicht durchschnitten. Wäre das Letztere der Fall, so müßte sich, weil die auf die angegebene Weise gegen A heruntergeschobene Linie CD nach unserer Voraussetzung zum Durchschnitt mit dem Schenkel AB kommt, ein erster Durchschnitt, d. i. ein Punkt in AB finden lassen, in welchem der Schenkel AB von der heruntergeschobenen Linie (CD) zuerst getroffen würde. Da es aber einen solchen ersten Durchschnitt nicht gibt, so ist die zweite Annahme falsch. Also haben sich die Linien CD und AB schon in ihrer ersten Lage geschnitten.

Hier liegt offenbar ein Trugschluß verborgen. Um ihn zu finden, wollen wir verschiedene Arten der Bewegung betrachten.

Denkt man sich von zwei Linien, welche beide auf derselben dritten senkrecht stehen, also (I p. 3) parallel sind, die eine um ihren Durchschnittspunkt gleichmäßig in der Ebene herumgedreht, so wird sie, wie wir hier dem Augenschein nach annehmen wollen, bei der geringsten Drehung die zweite durchschneiden, bei jeder folgenden, der ersten gleichen Drehung wird ihr Durchschnittspunkt auf der zweiten Linie anfangs sehr große, dann immer kleinere Wege durchlaufen, bis sie endlich auf der zweiten Linie senkrecht steht; dreht man dann die erste Linie gleichmäßig weiter, so muß ihr Durchschnittspunkt auf der zweiten immer größere, ja zuletzt, ehe beide Linien parallel werden, einen unendlich großen Weg durchlaufen. Auch hier läßt sich also ebensowenig der Uebergang vom Parallelismus zur Convergenz wie der umgekehrte angeben; auch hier müssen die Theile der einen Linie, welche beim Durchschneiden unter der anderen Linie liegen, bei der Annäherung der ersten Linie gegen die Senkrechte frühere Durchschnittspunkte gewesen sein, bei ihrer Entfernung noch Durchschnittspunkte werden; auch hier gibt es also keinen ersten oder letzten Durchschnitt, und doch gibt es eine Lage der Linien, in welcher sie sich nicht schneiden. Läßt sich hier schon annehmen oder beweisen, daß es beim Durchschieben anders sei?

Wenn wir die bewegte Linie von der Lage AH aus in stets gleicher Neigung gegen den Schenkel AL an diesem ruckweise um gleiche Strecken hinaufschieben, so wäre es möglich, daß dann auch ihre Durchschnittspunkte mit dem Schenkel AB auf diesem um gleiche oder wenigstens endliche Strecken auseinanderrückten; es wäre aber auch ebenso gut möglich, daß die Durchschnittspunkte immer größere und größere, ja sogar unendliche Strecken auf AB durchlaufen. Der Punkt, in welchem die bewegte Linie die AB durchschneidet, müßte im ersten Falle so lange in endlicher Entfernung von A liegen, als der Punkt l von A eine endliche Entfernung hat, im zweiten Falle aber schon viel früher sich ins Unendliche entfernen. Im ersten Falle müßten die beiden Linien in jeder der angegebenen Lagen sich schneiden, im zweiten müßten sie aber auch parallel werden können.

Nichts als der Augenschein berechtigt uns die erste dieser beiden Möglichkeiten als Nothwendigkeit anzunehmen. Eine petitio principii, welche sich diejenigen zu Schulden kommen lassen, die auf diese Annahme die Unterscheidung des ersten Durchschnitts beim Drehen und beim Durchschieben und darauf wieder den Beweis des Euklid'schen Grundsatzes gründen, d. h. alle diejenigen, welche mit Hülfe des Grundsatzes vom ersten oder letzten Schnitt den Beweis des Euklid'schen zu führen suchten. Da aber jene Annahme nur durch die Sätze der Parallelentheorie sich beweisen, also nur als Folge des Euklid'schen Grundsatzes sich ansehen läßt, während sie doch hier als Grund desselben aufgestellt wird,

4

so entsteht hier auch ein ὕστερον πρότερον. Kästner selbst macht noch überdies einen Zirkel im Beweisen. Nach der oben angeführten Stelle fährt er nämlich so fort: „Also läßt sich kein erster Punkt des Durchschiebens angeben, „wie beim Drehen kein erster Punkt des Durchschnitts, doch mit dem Unterschiede, daß hier nicht wie dort der „Schluß gilt, dieser erste Punkt lasse sich deßwegen nicht angeben, weil er weiter als alle Punkte, die sich angeben „lassen, von A entfernt liege. Denn man begreift, daß dieser Schluß wegfiele, wenn man nur annähme, CD in „der ersten Lage schnitte schon AB in einer bestimmten Entfernung von A, da dann dieser Durchschnitt der er„wähnte erste sein würde, dergleichen sich aber beim Drehen nicht angeben läßt." Dies kann doch nur heißen: Beim Drehen gibt es keinen ersten Punkt des Durchschneidens, beim Durchschieben gibt es einen solchen Punkt; dort können die Durchschnittspunkte ins Unendliche rücken, hier müssen sie in endlicher Entfernung bleiben; dort können die Linien parallel werden, hier müssen sie sich immer schneiden. Beim Drehen also kann jeder Punkt des Schenkels AB Durchschnittspunkt, aber kein in endlicher Entfernung liegender kann erster Durchschnittspunkt sein; beim Durchschieben können nur die zwischen dem ersten Durchschnittspunkte und dem Scheitel A liegenden Punkte des Schenkels AB Durchschnittspunkte sein, aber keiner von ihnen kann als der erste angesehen werden, weil CD in seiner ersten Lage mit AB den ersten Durchschnittspunkt bildet. Um zu zeigen, daß die Linie CD bei dem Herabziehen gegen A mit AB keinen ersten Durchschnitt bilden könne, setzt er also voraus, daß sie schon in ihrer ursprünglichen Lage mit AB den ersten Durchschnitt gebildet oder die AB durchschnitten habe; d. i. er begründet den Hülfssatz durch den zu beweisenden Satz, was offenbar ein Zirkel im Beweisen ist.

Der Satz, welchen Kästner mit Hülfe seines Grundsatzes vom ersten oder letzten Schnitt zu beweisen sucht, heißt eigentlich: Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten ein Dreieck bilden, so müssen sie mit dieser Linie immer ein Dreieck bilden, wie weit man sie auch, ohne die Neigung einer jeden von ihnen gegen die dritte Linie zu ändern, auseinanderrücken mag. Um denselben auch in dieser Form zu beweisen, sagt Kästner: „Man sieht „nicht, wie blos die längere Grundlinie die Dreiecke unmöglich machen soll. Man wird vielmehr nach dem, was „man bei den möglichen Dreiecken dieser Art wahrgenommen hat, urtheilen, daß bei einer längeren Grundlinie nur „die Seiten bis zum Zusammenstoßen weiter müssen fortgezogen werden." Durch diesen Schluß vom Besonderen auf das Allgemeine will er also beweisen, daß, wenn man die Grundlinie eines Dreiecks auf die angegebene Weise vergrößert, die beiden anderen Seiten desselben zwar auch größer werden müssen, aber nicht unendlich groß werden können. Mit demselben Rechte hätte er von der Wahrheit des Satzes: Wenn eine Figur ein Dreieck ist, so betragen je zwei innere Winkel derselben zusammen immer weniger als zwei Rechte, — auf die unmittelbare Gewißheit seiner Umkehrung schließen und dadurch den Euklid'schen Grundsatz etwa in folgender Form beweisen können: Wenn in einer dreiseitigen Figur zwei innere Winkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen, so muß die Figur ein Dreieck sein. Klügel, Kästners Schüler, glaubt hier diesen Schluß machen zu dürfen (S. Math. Wörterbuch, Art. Parallelen). Er formt aber den eben angeführten Satz von den inneren Winkeln des Dreiecks in den Satz IV der Parallelentheorie (S. S. 3) um und schließt von der Richtigkeit dieses Satzes auf die seiner Umkehrung, nämlich des Satzes II, welches der Euklid'sche Grundsatz selbst ist. Seine Rechtfertigung dieses Schlusses benimmt diesem nichts von seiner Willkührlichkeit.

2. **Der Grundsatz der ersten oder letzten Senkrechten** unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß dort die an dem einen Schenkel eines hohlen Winkels hingeschobene Linie gegen diesen Schenkel selbst stets gleich geneigt bleibt, während sie hier an dem einen Schenkel eines spitzen Winkels so hingeschoben wird, daß sie auf dem anderen Schenkel immer senkrecht steht. Auch diesem Grundsatz hat Legendre, welcher ihn zuerst anwandte, keine bestimmte Gestalt gegeben. Man könnte ihn etwa folgendermaßen ausdrücken:

2. Wenn man von Punkten, welche in dem einen Schenkel (AC) eines spitzen Winkels (α) liegen, Senkrechte auf den anderen Schenkel (AB) fällt, so werden die in dem letzteren Schenkel liegenden Fußpunkte dieser Senkrechten um so weiter sich vom Scheitel entfernen, je weiter ihre Anfangspunkte im anderen Schenkel (AC) vom Scheitel entfernt liegen; es läßt sich aber unter diesen Senkrechten keine letzte, am weitesten vom Scheitel A entfernte, oder kein Punkt des zweiten Schenkels (AB) angeben, in welchen die letzte vom ersten Schenkel (AC) auf ihn gefällte Senkrechte einträfe, so daß ein weiter vom Scheitel entfernter Punkt nicht mehr Fußpunkt einer solchen Senkrechten sein könnte; d. h. diese Senkrechten müssen in jedem beliebigen, wenn auch noch so weit vom Scheitel entfernten Punkte des zweiten Schenkels (AB) eintreffen können.

Nachdem Legendre gezeigt hat, daß die Senkrechten alle innerhalb des spitzen Winkels fallen und parallel sein, und daß deßwegen mit den Entfernungen ihrer Anfangspunkte vom Scheitel auch die ihrer Fußpunkte wachsen müssen, sagt er zur Erläuterung des Satzes weiter: „In diesem Wachsthume eine Gränze annehmen zu wollen „würde ungereimt sein. Denn gesetzt, man wollte behaupten, irgend eine der senkrechten Linien z. B. JH, sei die „letzte, folglich die, deren Fußpunkt H am weitesten vom Scheitel abstände, so ließe sich allemal darthun, daß, „wenn man die AC (über J hinaus) verlängerte, eine aus irgend einem Punkte L der Verlängerung auf AB gefällte „Senkrechte (LM) die AB so treffen müßte, daß die Entfernung AM größer wäre wie AH; was der Annahme, „daß JH die letzte, am weitesten von A entfernte Senkrechte sei, widerspricht. Folglich treffen auf AB in jeder „beliebigen, noch so großen Entfernung von A solche Senkrechte, die aus einem Punkte der AC gefällt sind, ein.“ Hieraus beweist er nun den besonderen Fall des Euklid'schen Grundsatzes: Wenn von zwei geraden Linien die eine mit einer dritten einen rechten, die andere einen spitzen Winkel bildet, so müssen sich die beiden ersteren Linien schneiden, — mit folgenden Worten: „Daher muß auch eine solche Senkrechte durch den Punkt B gehen und mit „der in B auf AB errichteten Senkrechten zusammenfallen, weil in einem Punkte (B) einer Linie auf diese nur „eine Senkrechte möglich ist.“ Also muß auch die im Punkte B auf den Schenkel AB errichtete Senkrechte den anderen Schenkel in irgend einem Punkte treffen.

In diesem Satze Legendre's ist eine **petitio principii** verborgen, welche Gilbert treffend nachweist mit den Worten: „Dieser Beweis thut zwar überzeugend dar, daß, falls es in der Verlängerung einer geraden Linie keine „Gränzen gibt, es auch kein letztes Perpendikel aus Punkten der AC auf AB geben könne. Allein daraus folgt „keineswegs, daß es in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A keine Gränzen geben könne. Denn es „wäre vielleicht doch denkbar, daß bei gleichweit entfernten Punkten auf der AC die Perpendikel auf AB immer „weiter von einander abständen, und ihre Entfernungen etwa in einer geometrischen oder anderen Reihe, die eine „endliche Summe hat, abnehmen könnten, da dann in gewissen Entfernungen der BD die AC sich ihr asymptotisch „nähern würde, ohne sie zu erreichen. In diesem Falle wäre zwar eine Gränze in der Entfernung jener Perpen„dikel vom Punkte A auf der Linie AB vorhanden, über die heraus, für jede Entfernung vom Punkte A kein „Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr durchschnitte; allein demungeachtet gäbe es kein letztes „Perpendikel, weil es bei allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zustand gibt. Es scheint daher etwas über„eilt zu sein, wenn Herr Legendre daraus, daß es kein letztes Perpendikel gibt, unmittelbar folgert, daß in jeder, „noch so großen Entfernung von A ein Perpendikel aufstehe; eine Folgerung, die nur dann gültig wäre, wenn er „dargethan hätte, daß es in der Entfernung der Durchschnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom „Punkte A an gerechnet, keine Gränze gebe. So lange er uns dieses nicht beweiset (und dieses möchte auf dem „Wege, den er einschlägt, kaum möglich sein), können wir seinen Beweis nicht als bindend anerkennen, sondern „müssen ihn, so viel Scharfsinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Versuchen die Schwierigkeit in der „Theorie der Parallelen zu heben beizählen.“

Zweite Gruppe.

Schwab stellt die folgenden zwei Grundsätze auf:

3a. Wenn zwei gerade Linien auf der nämlichen Ebene einerlei Lage gegeneinander haben, so haben sie auch die nämliche Lage gegen jede dritte Linie;

3b. wenn zwei gerade Linien gegeneinander eine verschiedene Lage haben, so haben sie auch eine verschiedene Lage gegen jede dritte Linie;

er nennt zugleich: Parallelen zwei in der Ebene gezogene gerade Linien, welche einerlei Lage gegeneinander haben; Nichtparallelen aber zwei in der Ebene gezogene gerade Linien, welche verschiedene Lage gegeneinander haben.

Er sagt selbst, daß sich die in seiner Definition verbundenen Begriffe von der Lage und der Identität wegen ihrer Einfachheit nicht befriedigend erklären, sondern nur erläutern ließen. Aus seinen Erläuterungen läßt sich jedoch nicht einmal erkennen, was er unter der Lage zweier Linien gegeneinander, noch weniger aber, was er unter einerlei oder verschiedener Lage derselben verstanden wissen will. Und doch kann man dies nicht für sich verstehen. Denn zwei gerade Linien können nur einerlei Lage gegeneinander haben; zur Vergleichung aber sind zwei oder mehrere Lagen nothwendig. Um von einerlei oder verschiedener Lage zweier geraden Linien gegeneinander sprechen zu können, müßte man entweder die Lage der Punkte der einen Linie gegen die andere, oder die Lage verschiedener Paare von Linien vergleichen, also gleichliegende Linien entweder überall gleich weit entfernte gerade Linien, oder solche Paare von geraden Linien nennen, welche gleiche Winkel mit einander bilden. Da jedoch im letzteren Falle unter gleichliegenden oder parallelen Linien nicht nur diejenigen verstanden werden könnten, welche mit derselben dritten Linie, sondern auch die, welche mit beliebigen anderen Linien gleiche Winkel bilden, so bliebe, um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, nichts übrig als Parallelen solche Linien zu nennen, welche keine Neigung gegeneinander haben, keinen Winkel mit einander bilden oder sich nicht schneiden; d. h. man müßte die Euklid'sche Erklärung annehmen. Daß diese Erklärung am meisten der Ansicht Schwabs entspreche, könnte man aus der Aeußerung: „Nun heißt aber die Lage zweier geraden Linien, welche sich beiderseits schneiden, ihre Neigung," welche er gelegentlich bei einem Beweise macht, schließen, wenn er nicht ganz am Schlusse seiner Parallelentheorie bewiese, daß zwei gerade Linien, welche in seinem Sinne parallel sind, sich nicht schneiden, und daß auch sich nicht schneidende Linien in seinem Sinne parallel sind. Die Unklarheit, welche in den Worten der Schwab'schen Grundsätze „gleiche oder verschiedene Lage zweier geraden Linien gegeneinander" liegt, können wir daher weder selbst aufhellen, noch gibt uns Schwab dazu die Mittel an die Hand. Dieser sucht eben nur nebenbei eine Erklärung dafür zu finden; zunächst aber ist es ihm um den Gleichklang der Worte zu thun, welcher es ihm möglich machen soll durch einen Schluß nach der Analogie seine beiden oben angeführten Grundsätze zu bilden.

Diese Grundsätze Schwab's haben zum Theile wohl wegen der Unbestimmtheit der Begriffe, welcher sie ihre Entstehung verdanken, gewiß aber auch wegen der von der Euklid'schen abweichenden Erklärung der Parallellinien, welche sie voraussetzen, keine Anerkennung und Verbreitung gefunden. Nicht ebenso erging es den ähnlichen, die Euklid'sche Erklärung beibehaltenden Sätzen, durch welche man die der Begründung der Parallelentheorie entgegenstehenden Schwierigkeiten zu überwinden oder vielmehr zu umgehen suchte. Man findet diese Sätze hauptsächlich bei denjenigen Mathematikern, welche zuerst eine genetische Entwickelung der Sätze der Geometrie versuchten und daher die bis jetzt besprochenen Lehr- und Grundsätze nicht brauchen konnten. Aber fast jeder von ihnen gibt diesen Sätzen eine etwas veränderte Form. Am meisten habe ich sie in den folgenden Formen gefunden:

Grundsatz 4a. Wenn zwei gerade Linien eine gleiche Richtung haben, so müssen beide auch gleiche Richtung gegen jede andere (sie schneidende) Linie haben.

Die Unklarheit, welche in dem vieldeutigen Worte Richtung liegt, wird hier von denen, welche den Grundsatz aufstellten, bei dem Beweise des Satzes III der Parallelentheorie (p. 3), zu welchem sie ihn anwandten, aufgehellt. Wir erfahren bei dieser Gelegenheit, daß Linien, welche gleiche Richtung gegeneinander haben, solche bedeuten sollen, welche, ohne sich zu schneiden, nebeneinander herlaufen, also parallel sind, während Linien, welche gegen dieselbe dritte eine gleiche Richtung haben, nicht solche sein sollen, welche mit der dritten parallel sind, sondern solche, welche mit der dritten gleiche Winkel bilden, daß also die Worte „gleiche Richtung zweier Linien" im Vorder- und Nachsatze in sehr verschiedenem Sinne aufzufassen sind.

Wer diesen Grundsatz zuerst aufstellte, weiß ich nicht. Ich weiß nur, daß Schweins mit Hülfe desselben den Satz III der Parallelentheorie (p. 3) zu beweisen pflegte, von welchem ebensowohl dieser wie die folgenden sogenannten Grundsätze nur besondere Formen sind.

Grundsatz 4 b. Zwei gerade Linien, welche keinen Richtungsunterschied haben, können auch keinen Richtungsunterschied gegen irgend eine andere gerade Linie haben. Hier bedeuten die Worte „Richtungsunterschied haben" im Vordersatze: Winkel bilden, im Nachsatze aber: verschiedene Winkel bilden; denn der Satz soll nichts anderes heißen als:

4 c. Zwei gerade Linien, welche keinen Winkel mit einander bilden, können auch keine verschiedenen (correspondirenden) Winkel mit einer dritten geraden Linie bilden; oder wie Bezout sagt:

4 d. Zwei gerade Linien, welche keine Neigung gegeneinander haben, können nach derselben Seite hin auch keine verschiedene Neigung gegen irgend eine andere gerade Linie haben.

Diese und ähnliche Sätze, auch alle durch Contraposition aus ihnen gebildeten, findet man als Grundsätze bei einem oder dem anderen Mathematiker; die letzteren zuweilen noch mit der näheren Bestimmung, daß der Unterschied der Neigungen zweier Linien gegen eine dritte der Neigung beider Linien gegeneinander gleich sein müsse.

Zu diesen Sätzen kenne ich keinen anderen Beweis als den von Bezout, welcher sagt: „Parallele (sich nicht schneidende) Linien müssen überall gleichweit entfernt sein; denn wenn sie an irgend einer Stelle näher wären als an einer anderen, so wären sie gegeneinander geneigt und müßten sich also schneiden können." Dies ist ein Zirkel im Beweisen, weil der durch Contraposition aus dem zu beweisenden Satze III gebildete Satz II, d. i. der Euklid'sche Grundsatz, als wahr vorausgesetzt wird; außerdem setzt der Beweis aber auch noch den Satz 3 p. 6 voraus.

Auch Thibaut bewegt sich im Zirkel beim Beweise eines Satzes, welcher dem Satze 2 a sehr ähnlich klingt, aber mit unserem Satze 5 (p. 7) identisch ist. Er nennt nämlich gleichgerichtete Linien solche, welche mit derselben dritten gleiche correspondirende Winkel bilden, und rechtfertigt den Satz: zwei gleichgerichtete Linien bilden mit jeder dritten sie schneidenden Linie gleiche einstimmige (correspondirende) Winkel; mit folgenden Worten: „Man mag die Anschauung der in jedem Punkte einer geraden Linie identischen „Richtung derselben anheben, in welchem dieser Punkte man will, so ist es nicht möglich, daß diese Richtung das „eine Mal als verschieden, das andere Mal als nicht verschieden von einer zweiten, aus einem bestimmten „Punkte neben ihr unwandelbar genommenen Richtung erscheinen kann."

Keiner von den Sätzen dieser Gruppe kann zu der vollen Gewißheit erhoben werden, welche wir in der Mathematik fordern müssen. Alle mit Ausnahme des Thibaut'schen sind nur Umformungen des Satzes III der Parallelentheorie (p. 3), welcher die Umkehrung des Satzes I (p. 3) ist. Da der Satz I sich beweisen läßt, muß auch seine Umkehrung (der Satz III) in vielen Fällen richtig sein; denn aus dem Satze: wenn A ist, muß auch stets **B** sein, folgt, daß, wenn **B** ist, in vielen Fällen wenigstens auch **A** sein muß; nicht aber, daß **A** immer sein muß, d. i. daß der Satz III in allen Fällen richtig ist, was hier nur durch Induktion gefunden werden kann. Um die Wahrscheinlichkeit, welche die Induktion gewährt, zu erhöhen, hat man noch außerdem einen Schluß nach der Analogie zu ermöglichen gesucht. Schwab spricht dies selbst aus; die übrigen bezeugen es durch das Haschen nach gleichklingenden Worten zur Bezeichnung von Dingen, welche an sich sehr verschiedene Bedeutung haben, deren gegenseitige Bedingtheit in allen Fällen aber erst durch den Satz III selbst nachgewiesen werden soll. Schon darum ist der Analogieschluß gewagt; außerdem würde er auch nicht die Grundsätze dieser Gruppe selbst, sondern ihre Umkehrung beweisen. Die Analogie beruht nämlich auf der Wahrscheinlichkeit, daß zwei Linien, welche in irgend einer Hinsicht einer dritten gleich sind, auch in derselben Hinsicht unter sich gleich sein müssen, weil zwei Linien, welche in Hinsicht ihrer Größe einer dritten gleich sind, auch selbst gleich groß sein müssen. Nachdem so das Allgemeine aus der Aehnlichkeit mit dem früher als wahr erkannten Einzelnen gewonnen ist, kann aus ihm die Richtigkeit des besonderen Falles gefolgert werden, daß nämlich zwei Linien, welche in Hinsicht ihrer Richtung einer dritten gleich sind, auch in derselben Hinsicht einander gleich sein müssen. Aber gewiß doch nur, wenn die Gleichheit zweier Linien in Hinsicht ihrer Richtung, ebenso wie oben die Gleichheit derselben in Hinsicht ihrer Größe, im Vorder- und Nachsatze in demselben Sinne aufgefaßt wird; dies ist nicht bei den Sätzen dieser Gruppe, wohl aber bei denen der folgenden der Fall, wo es beidemale Parallelismus der Linien bedeutet.

Dritte Gruppe.

Grundsatz 5. Zwei Linien, welche derselben dritten parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.

Grundsatz 6a. Eine Linie, welche eine von zwei parallelen Linien durchschneidet, muß auch die andere durchschneiden.

Grundsatz 6b. Durch einen Punkt außerhalb einer Linie läßt sich mit dieser nur eine Parallele ziehen.

Gibt man dem Satze 5 die Form: Ist eine von zwei parallelen Linien einer dritten Linie parallel, so muß auch die andere der dritten parallel sein —, so sieht man leicht, daß sich jeder der beiden Sätze 5 und 6a aus dem anderen durch Contraposition bilden und daher auch mit dessen Hülfe indirekt beweisen läßt.

Liegt (Satz 5) die Vergleichsparallele zwischen den beiden anderen Linien, so läßt sich beweisen, daß die beiden letzteren parallel sind. Denn wenn diese beiden dann nicht parallel wären, so müßten sie entweder in der Vergleichsparallele selbst oder auf der einen oder der anderen Seite derselben zusammentreffen; d. h. die Vergleichsparallele müßte entweder von beiden oder doch von einer der Linien, die ihr parallel sein sollen, geschnitten werden. Liegt aber die Vergleichsparallele außerhalb der beiden anderen Linien, so können wir weder beweisen, daß die letzteren parallel sind, noch daß sie sich schneiden. Wenn sie sich schnitten, dann freilich müßten zwei sich schneidende Linien derselben dritten parallel sein können. Mit welchem Rechte dies der zweite Satz verneint, werden wir sogleich untersuchen; hier genügt es uns festgestellt zu haben, daß der erste Satz ohne Hülfe des zweiten sich nicht zur vollen Gewißheit erheben läßt.

6ter **Grundsatz.** Der Satz I (p. 3) der Parallelentheorie, welcher sich, wie wir oben gesehen haben, auf verschiedene Arten beweisen läßt, lehrt, daß (Fig. I) eine durch einen außerhalb einer Linie **CD** liegenden Punkt **F** gezogene Linie **AB** mit **CD** parallel ist, wenn sie mit einer beliebigen die **CD** schneidenden Linie (**EH**) einen äußeren Winkel (α) bildet, der seinem correspondirenden, an **CD** liegenden Winkel $\varkappa$ gleich ist; er läßt aber unbestimmt, ob sich durch den Punkt **F** nicht noch andere Linien (wie **KL**) ziehen lassen, welche, obgleich sie mit **EH** äußere Winkel ($\alpha + \gamma$, β) bilden müssen, die größer oder kleiner sind als ihre correspondirenden Winkel ($\varkappa$, λ) an **CD**, dennoch mit CD parallel sind. Diese Unbestimmtheit wird durch den Satz 6 b. aufgehoben, nach welchem es durch F nur eine Parallele mit CD geben kann. Nach ihm kann daher die einzige durch den Punkt F gehende mit CD parallele Linie nur AB, d. h. eine Linie sein, die mit jeder sie und CD schneidenden Linie äußere Winkel (α, $\beta+\gamma$) bildet, welche ihren correspondirenden, an CD liegenden Winkeln ($\varkappa$, λ) gleich sind; nach ihm müssen also auch parallele Linien mit jeder sie schneidenden Linie gleiche correspondirende Winkel bilden, was auch der Satz III der Parallelentheorie (p. 3) behauptet.

Der Satz 6 b. sagt aber auch aus, daß es außer AB keine zweite durch F gehende, mit CD parallele Linie gibt, d. h. daß jede andere durch F gezogene Linie (KL) die CD schneiden muß. Da aber die AB und CD mit EH nach der Voraussetzung gleiche Winkel bilden, und jede durch F gezogene die AB schneidende Linie KL mit EH Winkel bilden muß, welche auf der einen Seite von EH größer, auf der anderen aber kleiner sind als die Winkel, welche AB mit denselben Seiten von EH bildet, so muß KL auch mit EH äußere Winkel bilden, von welchen der auf der einen Seite von EH liegende ($\alpha+\gamma$) größer, der auf der anderen (β) aber kleiner ist wie sein correspondirender Winkel an CD; oder in Zeichen: da nach der Voraussetzung $\alpha=\varkappa$ und $\beta+\gamma=\lambda$, immer aber auch $\alpha+\gamma>\alpha$ und $\beta<\beta+\gamma$ ist, so muß daher auch $\alpha+\gamma>\varkappa$ und $\beta<\lambda$ sein. Die Linien AB und CD bilden also mit jeder durch F gehenden, sie schneidenden Linie ungleiche correspondirende Winkel; nach dem Satze 2 b. müssen sie sich aber schneiden; daher sagt derselbe auch das Nämliche aus wie der Satz II der Parallelentheorie (p. 3), d. h. wie der Euklid'sche Grundsatz.

Dieser sogenannte Grundsatz enthält also, freilich in Verbindung mit dem Satze I der Parallelentheorie, nicht nur die Behauptung des Satzes II, sondern auch die des Satzes III dieser Theorie. Er kann daher ungeachtet seiner scheinbaren Einfachheit, durch welche sich viele verleiten ließen ihn als Grundsatz anzunehmen, als solcher nicht anerkannt werden. Auch ist ein apodiktischer Beweis desselben ohne Voraussetzung eines dieser Sätze II oder III nicht möglich; leicht lassen sich aber diese Sätze II und III mit Hülfe eines jeden der beiden sogenannten Grundsätze 5 oder 6, so wie umgekehrt diese mit Hülfe eines jeden von jenen indirekt beweisen.

Durch einen Beweis nach der Analogie lassen sich beide Sätze dieser Gruppe leicht begründen, wie wir am Schlusse der vorhergehenden Gruppe schon angegeben haben; nur muß man, um den dort geführten Beweis auch auf den Satz 2 anwendbar zu machen, dem Satze für das dem Besonderen, d. i. unseren Sätzen 5 und 6 ähnliche Einzelne, etwa folgende Form geben: Sind zwei Linien in Hinsicht ihrer Größe gleich, und ist eine derselben in Hinsicht ihrer Größe einer dritten gleich oder ungleich, so muß auch die andere in Hinsicht ihrer Größe der dritten gleich oder ungleich sein. Hieraus läßt sich das Allgemeine leicht hervorheben und daraus wieder das Besondere, nämlich die Gleichheit oder Ungleichheit der zweiten und dritten Linie, in Hinsicht auf ihre Richtung, d. i. der Parallelismus derselben begründen.

Der zweite Satz ist, wie wir zeigen werden, den Sätzen der folgenden Gruppe sehr nahe verwandt und läßt sich ebenso wie diese auch durch Induktion beweisen.

Vierte Gruppe.

Noch näher verwandt sind folgende zwei Sätze:

7ter Grundsatz. Durch einen innerhalb eines hohlen Winkels liegenden Punkt läßt sich immer eine gerade Linie ziehen, welche beide Schenkel schneidet.

8ter Grundsatz. Jede gerade Linie, welche durch einen innerhalb eines hohlen Winkels liegenden Punk geht, schneidet wenigstens den einen Schenkel des Winkels.

Man erkennt schon an den Sätzen selbst, daß der erste ein besonderer Fall des zweiten ist, insofern dieser zweite (8) aussagt, daß eine gerade Linie, welche durch das Innere eines Winkels geht, in jeder Lage wenigstens einen Schenkel desselben schneiden müsse, also in besonderen Lagen auch beide schneiden könne. Welches aber diese besonderen Lagen seien, darüber belehrt uns keiner von beiden Sätzen. Suchen wir deßhalb die Bedingungen des Durchschneidens zu finden.

Es sei ABC der gegebene Winkel (Fig. 14), D der in ihm liegende Punkt, ML eine durch ihn gezogene Linie. Die Verbindungslinie BD des Scheitels B mit dem gegebenen Punkte bildet mit den Schenkeln AB und BC und der Linie ML zwei Paare innere Gegenwinkel, α, γ und β, δ, welche, da ABC ein hohler und MDL ein flacher Winkel ist, zusammen kleiner als 4 R sind. Nun gibt es offenbar nur zwei Möglichkeiten. Entweder betragen die beiden Winkel eines jeden dieser Gegenwinkelpaare zusammen weniger wie 2 R, oder die Winkel des einen Paares sind zusammen gleich 2 R oder größer als 2 R, während die des anderen dann kleiner als 2 R sein müssen; d. h. es ist entweder $\alpha + \gamma < 2$ R und $\beta + \delta < 2$ R, oder es ist $\alpha + \gamma \geqq 2$ R und $\beta + \delta < 2$ R. Dies sind die Voraussetzungen des Euklid'schen Grundsatzes oder des Satzes II (p. 3), nach welchem dann auch im ersten Falle beide Schenkel des Winkels ABC von ML durchschnitten werden, im zweiten Falle aber nur der, welcher mit dem kleineren Gegenwinkelpaare (hier $\beta + \delta$) auf derselben Seite der Verbindungslinie BD liegt.

Weil, wie wir eben gesehen haben, die Sätze dieser Gruppe auf denselben Voraussetzungen beruhen wie der Euklid'sche Grundsatz, so lassen sie sich ebensowenig wie dieser als wirkliche Grundsätze, d. i. als Sätze, die keines Beweises bedürfen, ansehen, aber auch ebensowenig wie dieser apodiktisch beweisen. Nur durch Induktion können wir, geleitet von der Erfahrung, welche in vielen einzelnen Fällen die Behauptung der beiden Sätze bestätigt, die Ueberzeugung gewinnen, daß diese Behauptung allgemein wahr sei. Aber diese Ueberzeugung ist nur eine subjektive; es fehlt ihr die zwingende Kraft des apodiktischen Beweises. Denn die Induktion kann, da die Zahl der einzelnen Fälle sich durch die Erfahrung nicht erschöpfen läßt, den Uebergang vom Einzelnen zum Allgemeinen nur durch einen Sprung ermöglichen, gegen dessen Möglichkeit sich immer mehr oder weniger begründete Zweifel erheben lassen; hier aber um so mehr, als von keinem Euklidianer die Behauptung widerlegt werden kann, daß eine gerade Linie neben den beiden Schenkeln eines Winkels, oder wenn sie mit dem einen Schenkel desselben parallel ist, doch neben dem anderen asymptotisch herlaufen könne, ohne ihn je zu erreichen.

Daß und wie die Sätze dieser Gruppe mit Hülfe des Euklid'schen Grundsatzes bewiesen werden können, haben wir schon oben gesehen; wir haben daher nur noch zu zeigen, daß auch umgekehrt die Behauptung dieses Grundsatzes aus ihnen leicht gefolgert werden kann.

Bilden nämlich (Fig. 13) KL und CD mit EH ungleiche correspondirende Winkel ($\alpha + \gamma > \varkappa$), und legt man durch den Scheitel F von $\alpha + \gamma$ eine Linie AB so, daß sie von $\alpha + \gamma$ ein Stück $\alpha = \varkappa$ abschneidet, so muß nach Satz I, p. 3 die Linie AB mit der CD parallel sein, und die AB muß mit der KL den hohlen Winkel AFL bilden, in welchem die FH und also auch der Scheitel G des Winkels K liegt.

Setzt man nun den Satz 7 voraus und nimmt einen Punkt M an, der in FH über FG hinaus liegt, so läßt sich durch diesen Punkt eine Linie ziehen, welche beide Schenkel des Winkels AFL trifft und mit diesen also ein Dreieck begränzt, innerhalb dessen der Punkt G liegt. Da nun aber jede durch einen Punkt, welcher im Inneren einer vollkommen begränzten Figur liegt, gehende unendliche gerade Linie den Umfang dieser Figur wenigstens in zwei Punkten treffen muß, so muß auch die durch den Punkt G gehende gerade Linie CD zwei Seiten des Dreiecks durchschneiden, und weil sie die mit ihr parallele AB nicht schneiden kann, so muß KL eine der Seiten sein, welche von ihr geschnitten werden.

Setzt man aber den Satz 8 voraus, so muß die CD (Fig. 13), weil sie durch den im Inneren des Winkels **AFL** liegenden Punkt **G** geht, wenigstens einen der Schenkel dieses Winkels und zwar hier den Schenkel **KL** schneiden, weil sie den mit ihr parallelen anderen Schenkel nicht schneiden kann.

Wenn wir bei Grundsatz 8 annehmen, daß die durch das Innere des Winkels gehende Linie mit einem Schenkel desselben parallel laufe, so erhalten wir den Satz 6, welcher daher ein besonderer Fall von jenem ist. Die Verwandtschaft der Sätze der beiden letzten Gruppen ist also noch eine engere als die, welche alle 8 Sätze dieses Abschnitts verbindet und von ihrer gemeinschaftlichen Verwandtschaft mit den Sätzen **II** und **III** der Parallelentheorie, die mit ihnen gleiche Voraussetzungen haben, herstammt. Dieser Verwandtschaft waren sich die, welche einen oder den anderen dieser 8 Sätze aufstellten oder anwandten, nicht bewußt, denn sonst würden sie an die Stelle des Euklid'schen Satzes gewiß nicht andere gestellt haben, die, was jener mit klaren Worten sagt, nur versteckt ausdrücken. Sie mußten aber wissen, daß durch diese unvollständigen Beweisarten immer nur eine größere oder geringere Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, mit welcher, selbst wenn sie sich der apodiktischen Gewißheit nähert, der Mathematiker sich nicht begnügen darf; daß also weder die Analogie, noch die Induktion, sondern allein der apodiktische Beweis den aufgestellten Satz zu der vollen Gewißheit erheben kann, welche die Mathematik fordern muß.

Unter der Voraussetzung, daß diese Grundsätze ausdrücklich als solche bezeichnet werden, welche zwar eines Beweises bedürfen, aber nicht bewiesen werden können, läßt sich nichts dagegen einwenden, daß man einen oder mehrere von ihnen an die Spitze der Parallelentheorie stellt, um mit ihrer Hülfe die Beweise der Sätze dieser Theorie, und zwar ohne Unterbrechung, zu ermöglichen und dadurch die Theorie selbst übersichtlicher und klarer zu machen. Nur möchte ich bezweifeln, daß durch diese **petitio principii**, welche sich durch die Verwandtschaft des zu beweisenden Satzes mit dem Hülfssatze zu einem Zirkel im Beweisen gestaltet, mehr Uebersichtlichkeit und Klarheit gewonnen werden könne als durch die unumwundene Erklärung, daß und warum der Euklid'sche Grundsatz sich nicht beweisen lasse. Unbedingt aber muß ich bezweifeln, daß es in pädagogischer Hinsicht zulässig sei Sätze ohne weitere Bemerkung als wirkliche Grundsätze hinzustellen, d. i. stillschweigend zu erklären, daß sie keines Beweises bedürfen, während wir doch recht gut wissen, daß die begründeten Einwürfe, welche gegen die Wahrheit ihrer Behauptung erhoben werden können, sich nicht widerlegen lassen.

Im Vorhergehenden habe ich möglichst vollständig zu zeigen mich bestrebt, daß und warum alle Versuche ohne Aufgeben der Anschauungen Euklids dessen elften Grundsatz zu beweisen erfolglos blieben. Ich hatte die Absicht vor Angabe des Weges, auf welchem ich dieses Ziel erreicht zu haben glaube, die Bestrebungen derer zu schildern und zu beurtheilen, welche durch Aenderung beziehungsweise Verbesserung der hierher gehörigen Definitionen Euklids schon früher zu demselben Ziele gelangen wollten und theilweise gelangt sind. Da aber meine Abhandlung an sich schon weitläufiger geworden ist, als ich beabsichtigte, auch mehr Raum in Anspruch nimmt, als ich vor Beginn des Druckes dachte, so sehe ich mich, weniger um die gewöhnlichen Gränzen eines Programmes nicht zu überschreiten, als vielmehr um nicht durch den zu großen Umfang der Abhandlung diejenigen Freunde der Schule, welche keine Mathematiker sind, vom Lesen derselben abzuschrecken, genöthigt die Mittheilung dieses Theiles derselben auf eine andere Gelegenheit zu verschieben. Nur ungern faßte ich diesen Entschluß. Denn wenn auch die Aufstellung einer genetischen Definition für die Parallelen nur eine Vereinfachung der vier Hauptsätze (p. 3) in Hinsicht auf ihre Form bedingt, die Beweise derselben aber nur insofern fördert, als sie auf die Winkel als das die Lage der Linien Bedingende hinweist, so ist der Einfluß, welchen eine solche Definition des Winkels auf die Beweise jener Sätze ausübt, um so unmittelbarer. Es müßte uns die Besprechung dieser letzteren Definition nicht nur hinüberleiten zu der Bertrand'schen und den ihr verwandten Paralleltheorieen, welche den Beweis des Euklid'schen Grundsatzes auf die Vergleichung der Winkel mit den Parallelgürteln stützen, sie müßte auch diese Erklärung selbst und die Prinzipien feststellen und gegen einen etwa möglichen Einwurf wahren, auf welche diese Theorieen ebenso wie die meinige gegründet sind; diese letztere unterscheidet sich nämlich nur dadurch von jenen, daß sie die Schwierigkeiten vermeidet, die jene in ihrer jetzigen Gestalt dem Verständniß der Schüler noch bieten. Auf eine solche Sicherstellung der Erklärung und der Prinzipien muß ich verzichten, wenn ich im Folgenden versuche meinem in der Einleitung gegebenen Versprechen gemäß den Beweis des Euklid'schen Grundsatzes nebst den dazu gehörigen Erklärungen und Sätzen in möglichster Einfachheit zu geben.

Durch einen Punkt wird die unendliche gerade Linie in zwei Theile zerlegt, welche von diesem Punkte aus nach verschiedenen Richtungen ins Unendliche sich erstrecken; wir wollen jeden dieser Theile einen Strahl, ihren Gränzpunkt aber Strahlpunkt nennen.

Haben zwei beliebig liegende Strahlen einen gemeinschaftlichen Strahlpunkt, und denkt man sich den einen derselben in der durch beide bestimmten Ebene um den Strahlpunkt herumgedreht, bis er mit dem unbewegten anderen zusammenfällt, so durchläuft der bewegte Strahl einen unendlichen Theil der unendlichen Ebene, welchen wir Winkel nennen. Der Winkel ist also einer der beiden unendlichen Theile der unendlichen Ebene, welche begränzt werden durch zwei in dieser Ebene liegende, von demselben Strahlpunkte ausgehende Strahlen; die Gränzstrahlen heißen seine Schenkel, der diesen gemeinschaftliche Strahlpunkt sein Scheitel.

Um zwei Winkel in Hinsicht ihrer Größe miteinander vergleichen zu können, muß man sie so aufeinander gelegt denken, daß ihre Scheitel und ein Paar ihrer Schenkel zusammenfallen. Fällt dann auch das andere Schenkelpaar zusammen, so nennt man die Winkel gleich, außerdem aber ungleich; und zwar nennt man im letzteren Falle den Winkel den kleineren, dessen zweiter Schenkel innerhalb des anderen, des größeren Winkels zu liegen kommt. Hieraus folgt der

Grundsatz (a). Wenn zwei Winkel ungleich sind, so läßt sich der größere immer so in zwei Theile zerlegen, daß der eine derselben dem kleineren Winkel gleich wird.

Um alle möglichen verschieden großen Winkel vor den Augen vorüber zu führen, brauchen wir nur beide Schenkel erst zusammenliegend und dann, während der eine in seiner ursprünglichen Lage liegen bleibt, den anderen in derselben Ebene um den Scheitel herumgedreht zu denken, bis er wieder mit dem unbewegten Schenkel zusammenfällt, also die ganze Ebene durchlaufen hat.

Wir finden so die flachen, die hohlen, die erhabenen Winkel, wir finden auch die Ebene selbst unter den Winkeln, wir finden dann mit Hülfe der eben gegebenen Erklärung, daß alle flachen Winkel einander gleich und daher halb so groß sind als die ganze Ebene, und, wenn wir die hohlen Winkel in halbe flache oder rechte, in spitze (α) und stumpfe (β) Winkel eingetheilt haben, daß auch alle rechten Winkel einander gleich sind, und daß die Ebene $= 2$ Flachen $= 4\,R = m\,\alpha = n\,\beta$ ist, wobei m und n entweder ganze Zahlen oder Brüche sein, oder sich doch zwischen solche Zahlen einschließen lassen müssen, d. h. wir finden, daß die Ebene als ein Vielfaches eines jeden Winkels angesehen werden kann. Den Schülern wird dies verdeutlicht durch das Messen der Winkel, d. i. das Vergleichen derselben mit dem flachen oder rechten Winkel und ihren aliquoten Theilen.

Die Eintheilung und Benennung der Winkel mit Rücksicht auf ihre Lage übergehe ich, ebenso die Sätze, welche die Abhängigkeit bestimmen, in der die Neben- und Scheitelwinkel in Hinsicht ihrer Größe von einander stehen. Von den Sätzen, welche sich auf die gegenseitige Abhängigkeit der Gegen- und Wechselwinkel ihrer Größe nach beziehen, haben wir den einen schon oben (p. 3) angeführt und mit ♂ bezeichnet. Er müßte hier stehen und bewiesen werden, wie auch der folgende.

♀ Werden zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten, so sind von den dadurch gebildeten Gegenwinkeln auf der einen Seite der schneidenden Linie die beiden äußeren zusammen größer und die beiden inneren kleiner, auf der anderen Seite aber die beiden äußeren zusammen kleiner und die beiden inneren größer als 2 R; ferner ist jeder äußere auf der ersten Seite größer, auf der anderen aber kleiner als sein innerer correspondirender Winkel, und endlich ist von den Winkeln auf der ersten Seite jeder äußere größer, jeder innere kleiner als sein Wechselwinkel auf der anderen Seite, wenn eine dieser zwölf Behauptungen vorausgesetzt wird.

Dann kann die genetische Definition der Parallelen und Nichtparallelen gegeben werden. Nach derselben sind nämlich Parallelen zwei gerade Linien, die mit derselben dritten, der Richtungslinie, gleiche correspondirende-, oder gleiche Wechselwinkel oder Gegenwinkel bilden, welche Supplemente sind. Nichtparallelen aber sind zwei gerade

Linien, die mit einer dritten, ihrer Richtungslinie, ungleiche correspondirende- oder innere Gegenwinkel bilden, welche zusammen keine zwei Rechte betragen.

Die analytische Definition Euklids darf, wenn sie nicht mit Recht der Vorwurf der Unvollständigkeit treffen soll, erst nach dem Beweise des ersten Hauptsatzes gegeben werden.

Hierauf folgen die 4 Hauptsätze mit ihren Beweisen. Wir haben oben (p. 3) schon angegeben, wie dieselben nach der Euklid'schen Definition heißen; hier wollen wir sie daher nur in der einfacheren Gestalt aufführen, welche sie nach der genetischen Definition annehmen.

Satz I. Parallellinien schneiden sich nicht.

Der Beweis ist der oben (p. 20) gegebene indirekte, welcher sich auf die Congruenz der beiden von der Richtungslinie und den durch sie gebildeten Theilen der Parallelen begränzten Gürtel stützt.

Satz II. Nichtparallele Linien schneiden sich und zwar auf der Seite der Richtungslinie, auf welcher ein äußerer Winkel größer ist wie sein innerer correspondirender, oder auf welcher die zwei inneren Gegenwinkel zusammen weniger als zwei Rechte betragen.

Ich stütze den Beweis dieses Satzes auf den Grundsatz (b): Das Ganze ist größer als jeder seiner Theile, welcher in anderer Form auch heißt: Das Größere kann nicht ganz innerhalb des Kleineren liegen, es muß irgendwo über das Letztere hinausragen.

1r Beweis. Ist (Fig. 15) $\lambda > \alpha$, oder nach Grundsatz (a) $\lambda = \alpha + \beta$, so muß nach Grundsatz (b) ein Theil des größeren Winkels (γ_n) außerhalb des kleineren liegen; da nun der Winkel λ nicht über BD, in welchem sein einer Schenkel (CD) liegt, hinausfallen kann, so muß er irgendwo nach BG hin über den kleineren Winkel α hinausragen, d. h. es muß der Schenkel CH von λ den Schenkel BG von α irgendwo durchschneiden.

2r Beweis. Wenn BG von CH nicht durchschnitten würde, so müßte $\alpha + \beta + \delta_n = \alpha$, also das Ganze kleiner wie der eine seiner Theile sein. Höchstens könnte hier das Ganze einem seiner Theile gleich werden, wenn nämlich, was allerdings möglich ist, δ_n kleiner wie der kleinste denkbare Winkel wäre, also bei der Vergleichung der im Verhältniß zu ihm unendlich großen Winkel nicht berücksichtigt zu werden brauchte. Daß δ_n nicht negativ werden kann, weil λ ein hohler Winkel ist, braucht man den Schülern nicht zu sagen.

3r Beweis. Schiebt man, wie bei dem Grundsatze des letzten Schnitts (p. 24) die Linie BR, welche mit BD den Winkel $\lambda = \alpha + \beta$ bildet, an der letzteren Linie so hin, daß sie immer mit sich selbst parallel bleibt, so muß sie in Lagen kommen wie MN, PQ, in welchen sie die BG durchschneidet, und deßwegen muß $\alpha + \gamma = \alpha + \beta + \delta$, $\alpha + \gamma_1 = \alpha + \beta + \delta_1$, ... $\alpha + \gamma_p = \alpha + \beta + \delta_p$, also auch $\gamma = \beta + \delta$, $\gamma_1 = \beta + \delta_1$, ..., $\gamma_p = \beta + \delta_p$ sein. Nach diesen Gleichungen müssen, weil die Dreiecke δ, δ_1, . . . δ_p um so größer werden, je weiter die bewegte Linie sich von ihrer ursprünglichen Lage entfernt, auch die aufeinanderfolgenden Winkel γ, γ_1, . . . γ_p um ebensoviel zunehmen. Kleiner aber wie ein vorhergehender kann ein folgender Winkel nie werden; denn selbst im ungünstigsten Falle, wenn nämlich die Größe der Dreiecke im Verhältniß zu der der Winkel nicht in Betracht kommen könnte, muß er wenigstens ebenso groß sein wie jener. Also muß die bewegte Linie in jeder Entfernung von ihrer ursprünglichen Lage mit der BG einen Winkel bilden, welcher nicht kleiner sein kann als β; d. h. sie muß die BG in jeder dieser parallelen Lagen durchschneiden.

4r Beweis. Man kann den Satz: Jede gerade Linie, welche durch einen Punkt im Inneren eines hohlen Winkels geht, schneidet wenigstens den einen Schenkel des Winkels — auch vor die Sätze (♁ und ♀) über die Gegen- und Wechselwinkel, also auch vor die Hauptsätze stellen und ihn dort mit Hülfe unseres Grundsatzes b etwa auf folgende Art beweisen:

Die gerade Linie begränzt einen flachen Winkel, der, weil sein Scheitel, der gegebene Punkt, innerhalb des hohlen Winkels liegt, auch zum Theil wenigstens innerhalb desselben liegen muß. Da der flache Winkel aber größer ist wie jeder hohle, so kann er (nach Grundsatz b) nicht ganz innerhalb des letzteren liegen, muß also irgendwo über ihn hinausragen, d. h. die gerade Linie, welche den flachen Winkel begränzt, muß wenigstens den einen Schenkel des hohlen Winkels schneiden.

Der Hauptsatz II könnte mit Hülfe dieses Satzes später wie oben (p. 33) begründet werden.

Satz III. Linien, welche sich nicht schneiden, sind in Bezug auf jede Richtungslinie parallel. Beweis indirekt aus II.

Satz IV. Linien, welche sich schneiden, bilden mit jeder Richtungslinie auf der Seite der Convergenz äußere Winkel, die größer sind als ihre inneren correspondirenden Winkel, und innere Gegenwinkel, welche zusammen weniger als zwei Rechte betragen.

Beweis aus I, ♀ und II indirekt.

Es ist nun schon eine Reihe von Jahren, daß ich auf die eben angegebene Weise die Parallelentheorie lehre. Die Beweise des Satzes II, des Euklid'schen Grundsatzes, von denen ich gewöhnlich nur den ersten und zweiten gebe, haben die meisten Schüler immer sehr leicht verstanden. Das Vergleichen der Winkel, obgleich es unendliche Theile der unendlichen Ebene sind, fällt ihnen nicht schwer. Anders ist es bei der Bertrand'schen und den ihr verwandten Theorieen. Diese stützen den Beweis des Satzes II auf die Erkenntniß, daß jeder, wenn auch noch so kleine Winkel immer größer ist wie jeder von Parallelen begränzte Gürtel; sie müssen also unvollständig begränzte, d. i. unendliche Theile der Ebene von verschiedener Art mit einander vergleichen. Wenn auch der Einwurf, daß deßhalb die Vergleichung nicht zulässig sei, nicht stichhaltig ist, weil diese Größen, wenn auch nicht zu derselben Art oder Ordnung, doch zu derselben Gattung, zu den Flächenräumen gehören, so läßt sich doch das Resultat der Vergleichung nicht in Zahlen angeben, weil es größer ist wie jede denkbare Zahl, d. h. weil es unendlich ist. Zu erkennen aber, daß es Flächenräume von verschiedenen Ordnungen gebe, die so beschaffen sind, daß jede Größe einer niederen Ordnung gegen die einer höheren verschwindend klein sei, dies eben bietet den Schülern die meiste Schwierigkeit; ich möchte wenigstens keine Schlüsse auf diese Erkenntniß bauen. Wenn ich dieselbe aber auch nicht bei meinen Beweisen voraussetze, so suche ich doch am Schlusse der Parallelentheorie mit Hülfe der Hauptsätze den Schülern klar zu machen, daß vollständig umschlossene Flächenfiguren gegen Parallelgürtel, und diese wieder gegen die Winkel verschwindend klein sind, daß daher auch eine Größe höherer Ordnung durch Wegnehmen oder Zusetzen einer solchen niederer Ordnung ebensowenig wie ein periodischer Dezimalbruch durch das Wegnehmen oder Hinzufügen einer Periode vermehrt oder vermindert wird; ich lasse sie auch davon Anwendungen machen bei den Beweisen der Sätze über die Winkelsummen der Flächenfiguren, aber erst, wenn diese auf die gewöhnliche Weise bewiesen sind.

Nachdem Bertrand und die, welche ihm folgen, gefunden haben, daß (Fig. 15) der Winkel β immer größer sein muß als der Gürtel GBCL, so schließen sie ebenso wie wir im Beweis 1, daß der größere Winkel über den kleineren Gürtel hinausragen, oder daß sein Schenkel CH die dem Schenkel CL, welcher auch die eine Gränzlinie des Gürtels ist, parallele andere Gränzlinie desselben (BG) schneiden müsse; d. h. sie wenden ebenfalls den Grundsatz b an. Die größere oder geringere Verhältnißzahl der verglichenen Größen kann aber die Anwendbarkeit des Grundsatzes nicht bedingen; daher haben auch unsere Schlüsse in formeller Hinsicht ganz gleichen Werth. Da ich aber bei keinem Mathematiker irgend einen Einwand gegen diesen Schluß Bertrands gefunden habe, also wohl aus dem Stillschweigen die Billigung desselben folgern darf, so glaube ich auch hoffen zu dürfen, daß meinen Beweisen des Euklid'schen Grundsatzes die Anerkennung der Mathematiker nicht versagt werden wird.

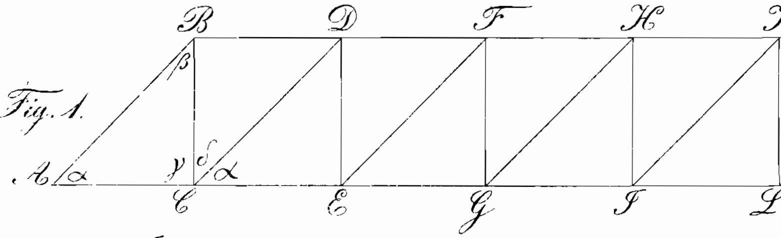


Fig. 1.

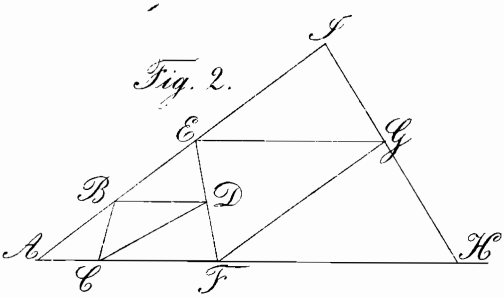


Fig. 2.

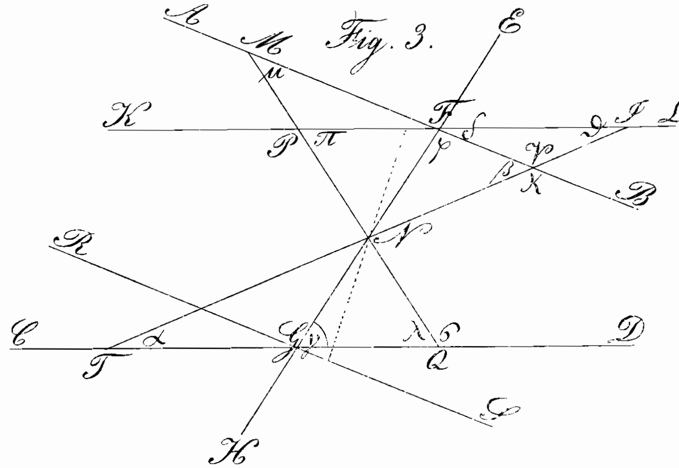


Fig. 3.

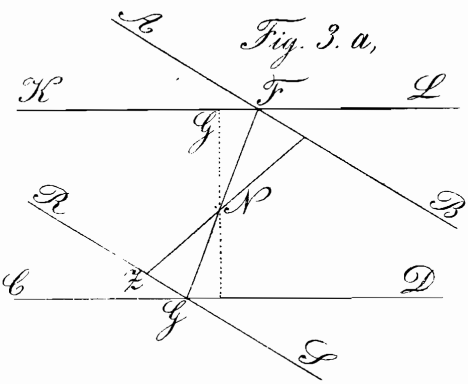


Fig. 3. a,

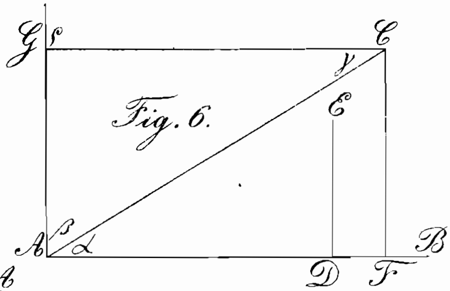


Fig. 6.

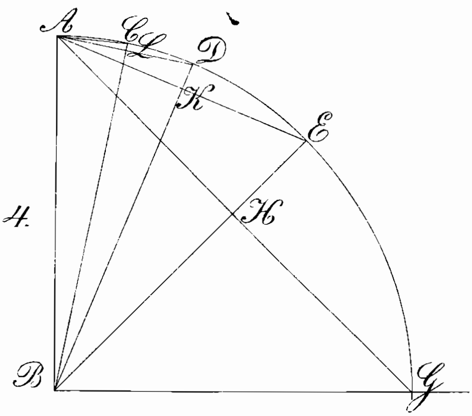


Fig. 4.

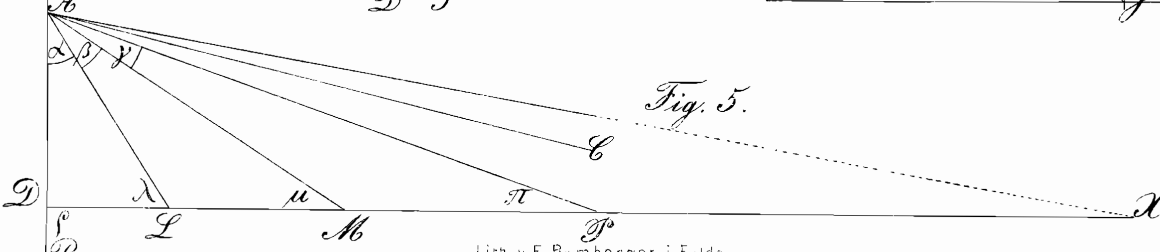
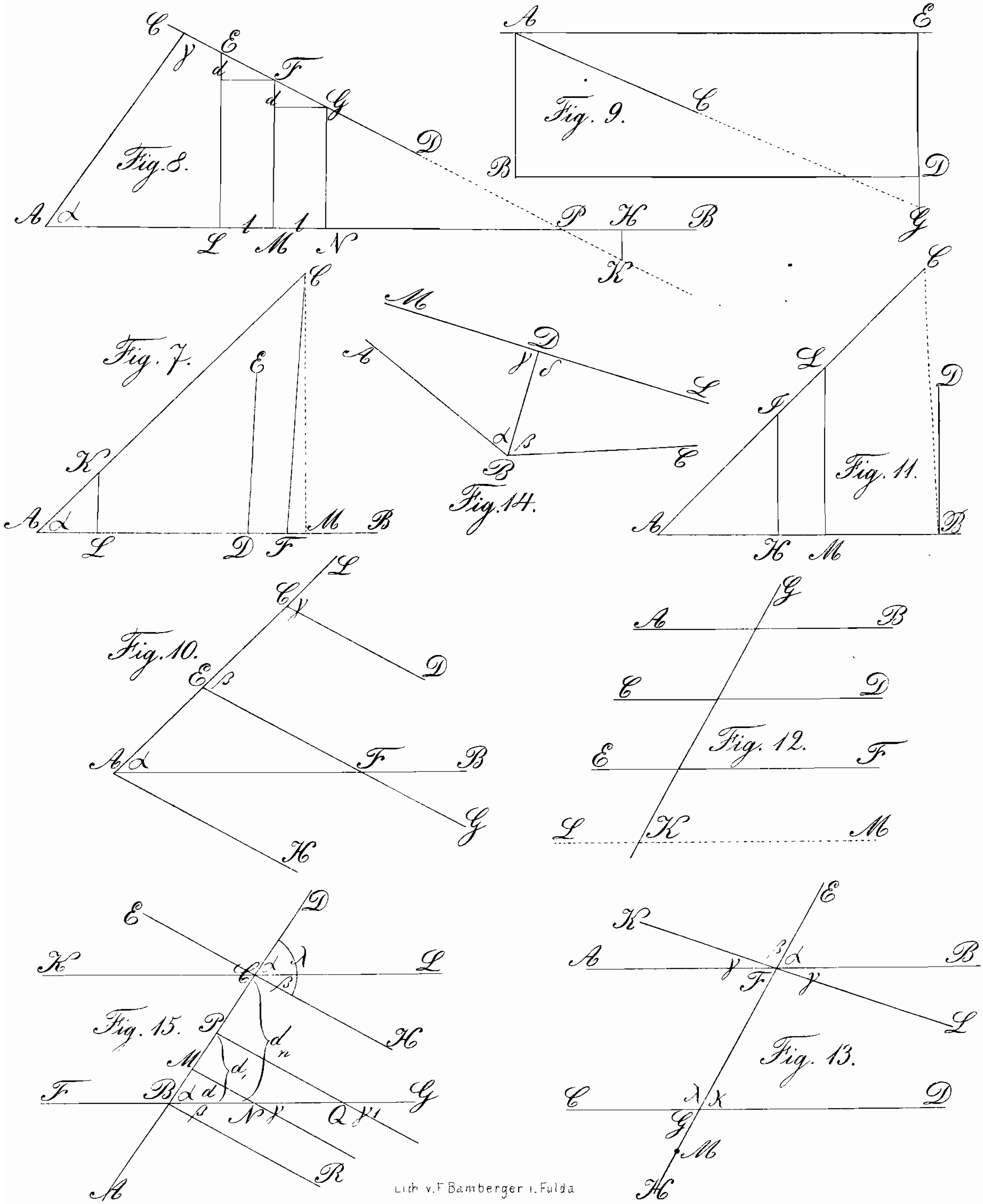


Fig. 5.

Lith v F. Bamberger i Fulda



Lith v. F Bamberger i. Fulda

Schulnachrichten.

A. Lehrverfassung.

Uebersicht des von Ostern 1861 bis Ostern 1862 ertheilten Unterrichts.

I. Sprachen und Wissenschaften.

Ober= und Unterprima.

Ordinarius: Der Director.

1. Griechische Sprache. Thucyd. VI und VII mit Auswahl. Sophocl. Ajax und Antigone nebst einer Einleitung in die griechische Tragödie. Grammatik nach Buttmann § 134—145 nebst Repetition früherer Abschnitte. Exercitien nach Franke 3. Cursus. 6 St. Dr. Weismann.

2. Lateinische Sprache. Horat. Od. Epod. mit Auswahl. Cic. Tusculan. mit Auswahl. Liv. XXI. Exercitien, Extemporalien, freie Aufsätze. Uebungen im Lateinsprechen. 8 St. Der Director.

3. Deutsche Sprache. Geschichte der deutschen Nationalliteratur von den ältesten Zeiten bis auf Opitz, nach Pütz; Proben aus dieser Periode und Lectüre des Nibelungenliedes und der Gudrun nach Schwartz Auswahl mittelhochdeutscher Dichter. Gelernt und vorgetragen wurden auserwählte Scenen aus Schiller's Wilhelm Tell und Braut von Messina. Aufsätze. 4 St. Gegenbaur.

4. Französische Sprache. Lectüre von Delavigne's Louis XI. und von Victor Hugo's lyrischen Gedichten in Gräser's Anthologie. Schriftliche und mündliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Französische. 2 St. Bormann.

5. Religionslehre. a) kathol. Sittenlehre, nach Martin's Lehrbuch. 2 St. Hahn. b) evangel. Geschichte der christlichen Kirche. 2 St. Bis Ende October Inspector Rollmann, sodann Dr. Claus.

6. Geschichte. Das Mittelalter, nach Pütz. Wiederholungen aus der alten Geschichte, besonders der römischen. 3 St. Der Director.

7. Mathematik. Arithmetik. Auflösung schwierigerer Gleichungen. Die Combinationslehre und der binomische Lehrsatz. Uebungen nach Heis § 63, 90—92, 107. Wiederholung und Fortsetzung der Stereometrie. Geometrische und trigonometrische Uebungsaufgaben, insbesondere mit Anwendung auf die Physik. 4 St. Dr. Gies.

8. Physik. Die Lehre vom Licht. Mechanische Erscheinungen tropfbarer und luftförmiger Flüssigkeiten. Die Lehre vom Schall. 2 St. Dr. Gies.

Ober- und Untersecunda.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Weismann.

1. Griechische Sprache. Herod. I, 1—91, VI, 94—Ende, VII, 1—40; Grammatik nach Buttmann § 122—133 und § 147. Wiederholung der Verba auf μι und Verba anomala. Exercitien nach Franke 2. Cursus; Extemporalien. Hom. Il. VII—XII. Privatim lasen unter der Leitung des Lehrers die Obersecundaner Hom. Od. X und XI, die Untersecundaner Hom. Od. III und IV. 6 St. Dr. Ostermann.

2. Lateinische Sprache. Cic. pro Rosc. Amer. und de imp. Cn. Pompeji. Grammatik nach Meiring Kap. 99—120 nebst Wiederholung früherer Abschnitte. Exercitien und Extemporalien. 7 St. Dr. Weismann. Virg. Aen. III und IV, 1—500. 2 St. Donner.

3. Deutsche Sprache. Die Lehre von den Formen und Gattungen der Poesie. Erklärung von Gedichten nach Bach's Lesebuch und von Schiller's Wilhelm Tell. Aufsätze. Declamationsübungen. 3 St. Dr. Weismann.

4. Französische Sprache. Syntax nach Müller's Grammatik. Lectüre von Voltaire's Charles XII. Schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Französische. 2 St. Bormann.

5. Religionslehre. a) kathol. Die vorchristliche und die christliche Offenbarung; die Lehre von der Kirche, nach Martin 1. Theil § 1—132. 2 St. Donner. b) evangel. combinirt mit Prima.

6. Geschichte und Geographie. Römische Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Reiches nach Pütz; Geographie von Alt-Italien und neuere Geographie der südwestlichen Staaten Europas. 3 St. Gegenbaur.

7. Mathematik. a) Arithmetik. Wiederholung und Fortsetzung der Lehren von den Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Die Logarithmen. Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. b) Geometrie nach Heis und Eschweiler, Kap. V—VII, die Hauptlehren z. Th. als Wiederholung, die übrigen als Uebungsaufgaben. Stereometrie. 4 St. Dr. Gies.

8. Naturkunde. Im Sommer die Anfangsgründe der Geognosie; im Winter mathematische Geographie. 2 St. Dr. Gies.

Obertertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Ostermann.

1. Griechische Sprache. Xenoph. Anab. I und II, c. 1—4; Hom. Odyss. II, III und IV. Grammatik nach Buttmann § 106—114 nebst Wiederholung der früheren Abschnitte. Exercitien und Extemporalien sowie mündliche Uebersetzungen nach Franke 1. Cursus. 6 St. Dr. Ostermann.

2. Lateinische Sprache. Caes. bell. Gall. V, c. 31—Ende, VI und VII. Grammatik nach Meiring's Elementargrammatik Kap. 87—99 sowie Wiederholung der Casuslehre (Kap. 77—86). Exercitien und Extemporalien sowie mündliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Lateinische nach dem Uebungsbuche des Lehrers. Vocabellernen nach dem etymologisch geordneten Vocabularium (Abth. IV) des Lehrers. 6 St. Dr. Ostermann. Ovid. Metam. II, III, IV, V. nach Nadermann's Auswahl. 2 St. Donner.

3. Deutsche Sprache. Lectüre und Erklärung von Gedichten und prosaischen Stücken aus Bach's Lesebuch. Declamationsübungen. Aufsätze. 3 St. Donner.

4. Französische Sprache. Seidenstücker 2r Curs. Schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Französische. 2 St. Bormann.

5. Religionslehre. a) kathol. Das christliche Kirchenjahr, mit Berücksichtigung der vorzüglichsten liturgischen Handlungen der katholischen Kirche, nach Malkmus. 2 St. Donner. b) evangel. Die christliche Lehre nach Luthers kleinem Katechismus. Memoriren evangel. Kirchenlieder. 2 St. Bis Ende October Inspector Rollmann, sodann Dr. Claus.

6. Geschichte. Neuere Geschichte, mit besonderer Berücksichtigung des deutschen Volkes, nach Pütz. 2 St. Donner.

7. Geographie. Europa, nach Roon. 2 St. Bormann.

8. Mathematik. a) Arithmetik. Repetition und Fortsetzung der Buchstabenrechnung bis incl. der Lehre von den Potenzen. Die Proportionen. Wiederholung der Decimalbrüche. Uebungen nach Heis § 13—37. b) Geometrie. Wiederholung von Kap. II und III; sodann Kap. IV und die Hauptlehren aus Kap. V. und z. Th. aus Kap. VI. 4 St. Dr. Gies.

9. Naturkunde. Im Sommer Botanik, insbesondere Uebungen im Bestimmen der Phanerogamen. 2 St. Dr. Lotz. Im Winter Zoologie, die wirbellosen Thiere. 2 St. Dr. Gies.

Untertertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Schmittdiel.

1. Griechische Sprache. Uebersetzungen aus dem Elementarbuche von Dominicus I. Abth.; Hom. Od. IX; Grammatik nach Buttmann § 106—109 (Verba auf $\mu\iota$) nebst erweiternder Wiederholung von § 4—105; Exercitien nach Dominicus II. Abth. 6 St. Körber.

2. Lateinische Sprache. Caes. bell. Gall. I, II, III und IV. Grammatik nach Siberti. Wiederholung der Formenlehre Kap. 7—82; Syntax Kap. 82—90. Exercitien, Extemporalien und mündliche Uebersetzungen aus dem Deutschen in's Lateinische nach Ostermann's Uebungsbuche. Ovid. Met. III, 1—130;, 511 bis zu Ende; V, 341—572; VI, 313—381; Vocabellernen nach Ostermann's Vocabularium Abth. IV. 8 St. Schmittdiel.

3. Deutsche Sprache. Lectüre und Erklärung von Gedichten aus Bach's Lesebuch. Die Lehre vom zusammengesetzten Satze. Aufsätze. Declamationsübungen. 3 St. Schmittdiel.

4. Französische Sprache. Seidenstücker 1r Curs. Schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen ins Französische. 2 St. Bormann.

5. Religionslehre. a) kathol. Die Lehre von den Gnadenmitteln und von den Geboten, nach Dubelman's Leitfaden, 2r Theil. 2 St. Schmittdiel. b) evangel. combinirt mit Obertertia.

6. Geschichte. Deutsche Geschichte des Mittelalters von 476—1519. 2 St. Bormann.

7. Geographie. Afrika und Amerika, nach Roon. 2 St. Bormann.

8. Mathematik, Geometrie nach Heis und Eschweiler, Kap. II—IV. Die Gesetze der ersten und zweiten Rechnungsstufe. Wiederholung des Ziffernrechnens. Proportionen. Heis § 14—34. 4 St. Dr. Lotz.

9. Naturkunde. Uebungen im Beschreiben und Bestimmen der Pflanzen, nach Gies Flora. Anthropologie; Systematik der Wirbelthiere, nach Leunis Leitfaden 1s Heft. 2 St. Dr. Lotz.

Quarta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Gegenbaur.

1. Griechische Sprache. Grammatik nach Buttmann von § 1—106; Dominicus Elementarbuch übersetzt bis zu den Verbis auf $\mu\iota$; Exercitien, Extemporalien und mündliche Uebungen, nach demselben Uebungsbuche. 5 St. Schmittdiel.

Lateinische Sprache. Corn. Nep. (Milt., Them., Arist., Alcib., Epam., Pelop., Hann.) Wiederholung des Pensums der Quinta; gelernt wurden die Vocabeln aus Ostermann's vocab. III; Grammatik sowie schriftliche und mündliche Uebungen nach Ostermann's Uebungsbuch III. 9 St. Gegenbaur.

3. Deutsche Sprache. Die Satzarten; Lectüre nach Bach's Lesebuch; Erklärung und Auswendiglernen von Gedichten. Aufsätze. 2 St. Gegenbaur.

4. Religionslehre. a) kathol. Glaubenslehre nach Dubelman 1r Theil. 2 St. Hahn. b) evangel. combinirt mit Tertia.

5. Geschichte. Geschichte der Römer bis zum Untergange des weströmischen Reichs, nach Pütz. 2 St. Donner.

6. Geographie. Asien, Afrika und Amerika, nach Gegenbaur. 2 St. Bormann.

7. Mathematik. Vorbegriffe der Geometrie; gerade Linien und Winkel; Parallelen und Convergenten; Winkelsummen von Dreiecken und Vielecken, nach Heis und Eschweiler Kap. 1. Decimalbrüche und Rechnungen des gemeinen Lebens, nach dem Leitfaden von Gies. 4 St. Dr. Lotz.

8. Naturkunde. Beschreibung einzelner Pflanzen; botanische Terminologie. Allgemeine Uebersichten über das Thierreich, nach Leunis Leitfaden 1s Heft. 2 St. Dr. Lotz.

Quinta.

Ordinarius: Beauftragter Lehrer Körber.

1. Lateinische Sprache. Wiederholungen aus dem Pensum der Sexta. Memoriren der Vocabeln des Ostermann'schen Vocabulariums II. Abtheilung. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus Ostermann's Uebungsbuch II. Abtheilung nebst den betreffenden Abschnitten aus Meiring's Elementargrammatik Kap. 1—75. 10 St. Körber.

2. Deutsche Sprache. Die Erweiterungen des einfachen Satzes, der zusammengezogene Satz, das Wichtigste vom zusammengesetzten Satze; Lectüre nach Bach's Lesebuch I, 2; Declamation; schriftliche Uebungen. 3 St. Körber.

3. Religionslehre. a) kathol. Biblische Geschichte des neuen Bundes nach Schuster, nebst dem apostolischen Glaubensbekenntnisse. 2 St. Donner. b) evangel. Biblische Geschichte des alten Bundes nach Zahn. Memoriren evangelischer Kirchenlieder. 2 St. Bis Ende October Inspector Rollmann, sodann Dr. Claus.

4. Geschichte. Griechische Geschichte von Anfang bis zum Tode Alexanders des Großen, 2 St. Bormann.

5. Geographie. Wiederholung des Pensums der Sexta; Europa und Deutschland, nach Gegenbaur's Leitfaden. 2 St. Rathmann.

6. Arithmetik. Das Zahlensystem; Ableitung der vier Grundrechnungen; Faktorenlehre; gemeine Brüche, nach dem Leitfaden von Gies. 4 St. Dr. Lotz.

7. Naturkunde. Beschreibung und Vergleichung einzelner Gliederthiere. 2 St. Im Sommer Auth; im Winter Dr. Lotz.

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Hahn.

1. Lateinische Sprache. Formenlehre nach Meiring's Elementargrammatik Kap. 1—44 mit Auswahl. Memoriren der Vocabeln des Ostermann'schen Vocabulariums I. Abtheilung. Mündliche und schriftliche Uebungen aus Ostermann's Uebungsbuch I. Abtheilung. 10 St. Hahn.

2. Deutsche Sprache. Die Lehre von den Wortarten und vom einfachen Satze; Lectüre nach Bach's Lesebuch; Declamation; schriftliche Uebungen. 3 St. Hahn.

3. Religionslehre. a) kathol. Biblische Geschichte des alten Bundes, nach Schuster; aus dem Diöcesan-Katechismus die Gebote Gottes und der Kirche. 2 St. Hahn. b) evangel. combinirt mit Quinta.

4. Geographie. Allgemeine geographische Vorbegriffe; allgemeine Beschreibung Europa's und Deutschland's, nach dem Leitfaden von Gegenbaur. 2 St. Rathmann.

5. Arithmetik. Das Zahlensystem; die vier Grundrechnungsarten mit unbenannten und benannten Zahlen; Factorenlehre, nach Gies Leitfaden. 4 St. Rathmann.

6. Naturkunde. Beschreibung einzelner Wirbelthiere, namentlich aus den Klassen der Säugethiere und Vögel. 2 St. Im Sommer Auth, im Winter Dr. Lotz.

II. Fertigkeiten.

1. Gesang. a) Sexta. Erklärung der Notenschrift im Allgemeinen; dynamische und rhythmische Uebungen im Besondern. 1 St. b) Quinta. Bildung der Dur- und Molltonleitern. 1 St. In beiden Classen wurden Thorbeke's „Gesanglehre" und Erk's und Greef's „Sängerhain" zu Grunde gelegt. c) Classis selecta und zwar: α] Chor für Männerstimmen, aus den drei oberen Classen bestehend, übte Motetten und größere Chöre ein. β) Gemischter Chor, bestand aus den für Gesang begabteren Schülern der unteren Classen (Sopran und Alt) vereinigt mit dem Männerchor. Zusammen 2 St. Zur Einübung der für den katholischen Gymnasialgottesdienst nöthigen Choräle wurde, nach Bedürfniß, die für die Gesangübungen der Selecta bestimmte Vormittagsstunde verwendet. Gesanglehrer Henkel.

2. Zeichnen. a) Sexta. Geometrisches und perspektivisches Zeichnen geradliniger Körper und Zusammenstellung architektonischer Gebilde, nach Vorzeichnungen an der Tafel, später nach Vorlegeblättern. Umrisse im Kopfzeichnen, sowie einfaches Landschaftszeichnen mit leichter Schattirung. 2 St. b) Quinta. Zeichnen verschiedener Gegenstände, nach Vorlagen, als Landschaften, Architekturstücke, Thiere, Köpfe und Figuren. 2 St. c) Quarta. Dieselben Uebungen wie in Quinta, nur mit größerer Ausführung. 1 St. d) Classis selecta, bestehend aus Schülern der drei oberen Classen. Vollständige Ausführung von Köpfen, Landschaften, Architekturstücken, Thieren ꝛc., mit Bleistift, Kreide und Farben. 2 St. Zeichenlehrer Binder.

3. Schönschreiben. a) Sexta. Uebungen in der deutschen und lateinischen Schrift, indem die einzelnen Buchstaben in genetischer Reihenfolge auf der Tafel vorgeschrieben wurden; die eingeübten Buchstaben wurden zu Wörtern, diese zu Sätzen verbunden. Im Wintersemester wurde das im Sommer vorgenommene Pensum durch Dictate eingeübt. 4 St. b) Quinta. Einübung der deutschen und lateinischen Buchstaben, Uebungen im Schreiben nach Vorschriften auf der Schultafel. 2 St. c) Quarta. Dieselben Uebungen wie in Quinta; außerdem wurde die griechische Schrift eingeübt. Einzelne geübtere Schüler schrieben Fracturschriften. 2 St. Rathmann.

4. Körperliche Uebungen. Die Turnübungen wurden in derselben Weise wie im vorigen Jahr, im Winter in der Turnhalle, im Sommer im Freien, unter der Leitung des Zeichenlehrers Binder betrieben.

Die Schwimmübungen fanden den Sommer hindurch bei günstiger Witterung auf der Schwimmanstalt des Gymnasiums statt. Der Herr Oberst von Buttlar, Commandeur des dritten Infanterie-Regiments, gestattete wie in den früheren Jahren freundlichst, daß zwei Sergeanten des Regiments den Schwimmunterricht leiteten und daß die Schwimmanstalt des Gymnasiums zugleich mit der des Regiments von dem Militärposten bewacht wurde. Der Herr Domänenpachter Menz auf Ziehers räumte gütigst auf seiner Wiese an der Fulda einen geeigneten Platz für die Uebungen ein. Beiden Herren spreche ich im Namen der Anstalt den verbindlichsten Dank auch öffentlich aus.

Mit der Kirchenordnung wurde es wie im vorigen Jahr gehalten. Bei der Spendung des h. Bußsacraments leistete der Herr Lehrer Auth den Religionslehrern des Gymnasiums die bereitwilligste Aushülfe, wofür demselben der Unterzeichnete den verbindlichsten Dank ausspricht. Der vorbereitende Unterricht für die erste h. Communion der katholischen Schüler wurde von dem Gymnasiallehrer Donner in besonderen Stunden ertheilt. Von dem ersten Pfarrer der evangelischen Gemeinde, Herrn Inspector Rollmann, erhielten acht Schüler den Confirmanden-Unterricht und werden am Sonntag nach Ostern in der hiesigen evangelischen Kirche feierlich eingesegnet werden.

B. Chronik des Gymnasiums.

Das verflossene Schuljahr war für unsere Anstalt in Betreff des Gesundheitszustandes der Betheiligten im Allgemeinen ein recht ungünstiges. Mehrere der Lehrer wurden durch Krankheit theils auf längere, theils auf kürzere Zeit, zum Theil gleichzeitig und wiederholt ihrer amtlichen Thätigkeit entzogen, so daß es kaum gelang, den Lehrplan überall vollständig durchzuführen. Im Einzelnen ist aus der Chronik des Gymnasiums Folgendes zu erwähnen.

1. Das Schuljahr wurde am 9. April mit Choralgesang, Gebet, Anrede an die Schüler, Verlesung und Erläuterung der Schulgesetze im Prüfungssaal feierlich eröffnet. Sodann wurden die Aufnahmeprüfungen vorgenommen. Es waren im Ganzen 48 Schüler angemeldet. Von diesen wurden 28 in die Sexta, 4 in die Quinta, 8 in die Quarta, 2 in die Untertertia, 5 in die Obertertia, 1 in die Unterprima aufgenommen. Am 10. begann, nach einem feierlichen Gottesdienst für die katholischen Schüler, der Unterricht.

2. Die Sommerferien dauerten vom 29. Juni bis zum 22. Juli, die Herbstferien vom 24. September bis zum 12. October, die Weihnachtsferien vom 23. December bis zum 2. Januar.

3. Am 16. Mai starb Julius Fuchs, im vorigen Schuljahr ein braver Schüler der Quarta, nach langer Krankheit an einem organischen Herzleiden. Seit einem halben Jahre hatte derselbe gar nicht und vor dem schon seit längerer Zeit nur sehr unregelmäßig die Schule besuchen können. Am 18. Mai geleiteten Lehrer und Schüler seine Leiche zu ihrer Ruhestätte.

4. Am 25. Mai wurden die 15 katholischen Schüler, welche von dem Gymnasiallehrer Donner den vorbereitenden Unterricht für die erste h. Communion erhalten hatten, in Gegenwart des Directors und der geistlichen Gymnasiallehrer geprüft.

5. Am Frohnleichnamsfest fand in der Gymnasialkirche die erste h. Communion der erwähnten 15 Schüler statt und mit denselben empfingen auch die übrigen älteren katholischen Schüler sowie die katholischen Lehrer des Gymnasiums das h. Abendmahl. Bei dem feierlichen Gottesdienst, an welchem auch die Eltern und Angehörigen der Neucommunicanten theilnahmen, wurden die geistlichen Lehrer des Gymnasiums in der freundlichsten Weise von dem Herrn Lehrer Auth unterstützt.

6. Am 2. Juni folgten die katholischen Lehrer und Schüler des Gymnasiums der Frohnleichnamsprozession.

7. Am 11. Juni und am 8. August machten die Schüler mit ihren Lehrern abtheilungsweise weitere Spaziergänge in die Umgegend.

8. Am 16. Juni empfingen 17 Schüler, durch den Gymnasiallehrer Donner hierzu vorbereitet, in der Domkirche von der Hand des Hochwürdigsten Herrn Bischofs das h. Sakrament der Firmung.

9. Am 20. August beging das Gymnasium die Feier des hohen Geburtsfestes Seiner Königlichen Hoheit des Kurfürsten in dem neu dekorirten und festlich ausgeschmückten Prüfungssaale unter Betheiligung eines sehr zahlreichen Publikums. Die Festrede hielt der Gymnasiallehrer Schmittdiel, über die Principien der Pädagogik im Allgemeinen und den obersten Grundsatz der christlichen Erziehung im Besonderen und sprach am Schluß derselben ein Gebet für das Heil des verehrten Landesherrn, des huldvollen Beschützers und Förderers unsers Gymnasiums.

10. Am 22. September fand die gemeinschaftliche Feier des h. Abendmahls der evangelischen Lehrer und Schüler des Gymnasiums statt.

11. Durch Beschluß Kurfürstlichen Ministeriums des Inneren vom 16. September 1861 zur Nr. 7149 wurde der Schluß des Sommersemesters in diesem Jahre um zwei Tage früher als gewöhnlich gestattet, um es den Lehrern des Gymnasiums möglich zu machen, sich bei der Versammlung deutscher Philologen, Schulmänner und Orientalisten zu Frankfurt a. M. rechzeitig zu betheiligen. Demnach wurde das Sommersemester am 23. September, nach einem feierlichen Gottesdienst für die katholischen Schüler, mit einer öffentlichen Schulfeierlichkeit geschlossen. Bei derselben hielt der Unterprimaner Prosper Wesener einen lateinischen Vortrag „de virtute et fortitudine"; der Oberprimaner August Wankel und der Unterprimaner Philipp Braun hielten deutsche Vorträge, jener über das Thema: „Welchen Nutzen hatten die Perserkriege für Griechenland?" dieser über das erste Auftreten der Deutschen in der Geschichte. Gedichte wurden deklamirt von den Sextanern Alexander Beckmann und Adam Keißner, den Quintanern August Knorz und Ludwig Wessel, dem Quartaner Hugo Henkel, dem Untertertianer Emil Keitz, den Obertertianern Franz Bosing und Hugo Schmidt, dem Obersecundaner Heinrich Weigand und dem Untersecundaner Adolf von Eschstruth. Die Sängerchöre des Gymnasiums trugen der Feier des Tages angemessene Gesänge vor.

12. Mit dem Schluß des Sommersemesters schied der Candidat des Gymnasiallehramts Eduard Auth aus unserer Mitte, um eine Lehrerstelle an einem Privat-Erziehungsinstitut zu Pfungstadt im Großherzogthum Hessen zu übernehmen. Derselbe war, nachdem er das Probejahr erstanden hatte, auf seinen Wunsch bei unserm Gymnasium weiter beschäftigt und machte sich durch seine bereitwillige Aushülfe, namentlich in Erkrankungsfällen von Lehrern, um dasselbe verdient.

13. Am 14. October wurde das Wintersemester, in gleicher Weise wie das Schuljahr, eröffnet. Von den 7 zur Aufnahme angemeldeten Schülern wurden 2 in die Sexta, 4 in die Quarta, 1 in die Untertertia aufgenommen.

Durch Beschluß Kurfürstlichen Ministeriums des Innern vom 28. October 1861 z. Nr. 8177 wurde der zweite evangelische Pfarrer hierselbst Dr. Claus mit der Ertheilung des evangelischen Religionsunterrichts an dem hiesigen Gymnasium vom 1. November an, gegen den Bezug einer monatlichen Vergütung von sechszehn Thalern zwanzig Sgr. aus der Kasse des Gymnasiums, beauftragt und am 4. November von dem Director in diese ihm übertragenen Functionen eingewiesen. Gleichzeitig wurde von diesen Functionen der bisherige evangelische Religionslehrer Rollmann, nachdem er zum ersten evangelischen Pfarrer und geistlichen Inspector hierselbst ernannt worden war, seinem Ansuchen gemäß entbunden. Dieser hatte seit Ostern 1855 als evangelischer Religionslehrer an unsrer Anstalt gewirkt und sich in dieser Stellung durch den unermüdlichen Eifer und die gewissenhafte Pflichttreue, womit er die Obliegenheiten eines Religionslehrers und Seelsorgers erfüllte, um dieselbe verdient gemacht. Wir freuen uns deshalb, mit demselben auch in seiner jetzigen Stellung eine nähere Verbindung zu unterhalten und hoffen, daß er auch fernerhin seine freundliche Theilnahme dem Gymnasium zuwenden wird.

16. Am 16. December verlor die Anstalt einen sehr braven und hoffnungsvollen Schüler, den Sextaner Franz Kind, welcher nach einem kurzen Krankenlager am Nervenfieber starb. Am 18. December geleiteten Lehrer und Schüler seine Leiche zu ihrer Ruhestätte.

17. Am 4. Februar fand die herkömmliche Hrabanusfeier statt. Bei derselben hielt der Oberprimaner Joseph Wiegand einen lateinischen Vortrag über den Ausspruch Ovids: „**Ingenuas didicisse fideliter artes Emollit mores, nec sinit esse feros**". Der Unterprimaner Christoph Menz und der Oberprimaner Nikolaus Füller hielten deutsche Vorträge, jener über das Thema: „In wiefern ist die christliche Kirche die Pflegerin der Kirche im Mittelalter?" dieser über die Gründung Fulda's und den Glanz seiner Klosterschule. Gedichte wurden deklamirt von den Sextanern Joseph Hüfner und Christoph Böcken, den Quintanern Franz Hill und Franz Kramm, dem Quartaner Karl von Schlereth, dem Untertertianer Alfred von Sodenstern, den Obertertianern Karl Wagner und Georg Kirchner, dem Obersecundaner Valentin Kramm. Die Sängerchöre des Gymnasiums trugen der Feier des Tages angemessene Gesänge vor.

18. Am 9. März betheiligten sich die Lehrer und Schüler des Gymnasiums bei dem feierlichen Leichenbegängniß des verstorbenen Directors des hiesigen Schullehrer-Seminars Pfister, der unserer Anstalt stets eine lebhafte Theilnahme bewiesen und namentlich auch viele unsrer Schüler in edler und wirksamer Weise unterstützt hatte. Sein Andenken wird noch lange bei uns geehrt werden.

C. Statistische Verhältnisse.

1. Frequenz des Gymnasiums.

Am Schluß des vorigen Schuljahrs betrug die Zahl der Schüler 193. Von diesen traten außer den im letzten Programme genannten 9 Abiturienten noch 10 Schüler aus und zwar 3, um die hiesige Realschule zu besuchen, 1, um in das hiesige Bischöfliche Knabenseminar einzutreten, 1, um sich der Pharmazie, 1, um sich dem dem Kassen-Rechnungswesen zu widmen, 1, um die Handlung zu erlernen, 1, wegen Kränklichkeit, 2, ohne nähere Angabe ihrer ferneren Bestimmung.

Bei dem Beginn des jetzigen Schuljahrs betrug die Gesammtzahl der Schüler, da 48 neu aufgenommen wurden, 222. (**I** 23, **II** 29, **IIIa** 26, **IIIb** 22, **IV** 38, **V** 48, **VI** 36), unter welchen sich 150 katholische, 72 evangelische, so wie 158 einheimische und 64 auswärtige befanden.

Im Verlauf des Schuljahrs gingen 23 Schüler ab, ohne den Cursus vollendet zu haben, wogegen 9 aufgenommen wurden.

Am Schluß des jetzigen Schuljahres beträgt demnach die Zahl der Schüler 208 (**I** 19, **II** 26, **IIIa** 24, **IIIb** 21, **IV** 41, **V** 44, **VI** 33); unter diesen sind 139 katholische, 69 evangelische; sowie 64 auswärtige und 144 einheimische.

Von den ausgetretenen Schülern wollten 2 die Handlung, 2 ein Handwerk erlernen, 2 in den Franziskaner-Orden treten, 2 sich durch Privatunterricht weiter ausbilden, 1 wollte ein Handelsinstitut, 1 die hiesige Domschule, 4 die Realschule zu Hanau, 1 das Gymnasium zu Kassel besuchen, 1 sich der Landwirthschaft, 1 dem Postfach, 1 der Pharmazie widmen, 1 in das hiesige Bischöfliche Knabenseminar eintreten; 4 traten aus ohne Angabe ihrer ferneren Bestimmung, 1 ohne vorschriftsmäßige Abmeldung; 1 starb.

2. Abiturienten.

Am Schluß des Schuljahrs werden folgende Schüler der Oberprima mit dem Zeugniß der Reife zur Universitat entlassen worden:

1. Rudolf von Bischoffshausen, geboren zu Hanau am 26. October 1844, Sohn des Regierungsraths von Bischoffshausen zu Fulda, evangelischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit dem Herbst 1855, will Jurisprudenz studiren.

2. Nikolaus Füller, geboren zu Fulda am 18. December 1839, Sohn des daselbst verstorbenen Tuchscheerers Füller, katholischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1854, will Theologie studiren.

3. Nikolaus Kircher, geboren zu Großenbach am 30. October 1840, Sohn des Landbauers Kircher daselbst, katholischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1853, will Theologie studiren.

4. Hugo Müller, geboren zu Fulda am 1. April 1843, Sohn des Uhrmachers Müller daselbst, katholischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1853, will Mathematik und Naturwissenschaften studiren.

5. August Wankel, geboren zu Melsungen am 6. September 1843, Sohn des daselbst verstorbenen Lehrers an der Forstlehranstalt Wankel, katholischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1853, will Staatswissenschaft studiren.

6. Joseph Wiegand, geboren zu Fulda am 26. Juli 1842, Sohn des verstorbenen Verwalters Wiegand, katholischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1853, will Theologie studiren.

7. Ferdinand von Winckler, geboren zu Heimbach bei Fulda am 18. Februar 1843, Sohn des Landwirths von Winckler zu Neuenberg bei Fulda, evangelischer Confession, Schüler des Gymnasiums seit Ostern 1853, will Staatswissenschaft studiren.

Es erhielten von Bischoffshausen, Füller, Wankel und von Winckler das Prädikat „sehr gut vorbereitet", Kircher, Müller und Wiegand das Prädikat „gut vorbereitet".

3. Sammlungen und Lehrmittel.

Die Gymnasialbibliothek, die Schülerbibliothek, die naturgeschichtlichen Sammlungen, das physikalische Kabinet und die sonstigen Lehrmittel sind aus den etatsmäßigen Mitteln angemessen vermehrt worden.

Von Kurfürstlichem Ministerium des Innern wurde eine große Anzahl von Programmen und sonstigen Gelegenheitsschriften der zu dem Tauschverein gehörenden Anstalten so wie von der Landesuniversität Marburg sämmtliche in dem verflossenen Jahre bei derselben erschienenen Schriften zugesandt. Außerdem erhielt die Bibliothek folgende Geschenke: von dem Herrn Staatsrath Dr. Adelmann zu Dorpat mehrere akademische Schriften; von dem Herrn Gymnasialdirector Dr. Wiegand zu Worms Platons Werke. Fünfte Gruppe: Zweifelhaftes und Unächtes. Dreizehn Briefe, zum ersten Male verdeutscht und durch Anmerkungen erläutert. 1. Bändchen. Stuttgart 1859; von dem Herrn Pharmazeuten Ferdinand Dronke verschiedene Atlanten und Karten; von dem österreichischen Gymnasiallehrer Herrn Dr. Schell eine Anzahl Programme österreichischer Gymnasien; von dem Herrn Buchhändler Maier hierselbst Broweri Fuldensium antiquitatum libri IV. Antverpiae 1612, Winkelmann's Beschreibung des Fürstenthums Hessen. Bremen 1697; von dem Herrn Rechnungsführer von Schlereth Leibnitii protogaea ed. Scheidius. Goettingae 1749. Das Naturalienkabinet erhielt Geschenke von Herrn von Schlereth und dem Herrn Revierförster Bechtold zu Neuhof. Für alle diese Geschenke spreche ich im Namen des Gymnasiums den verbindlichsten Dank aus.

Die Verwaltung der Gymnasialbibliothek wurde von dem Gymnasiallehrer Dr. Weismann, die Aufsicht über die naturwissenschaftlichen Lehrmittel von dem Gymnasiallehrer Dr. Gies geführt.

4. Stipendien und Beneficien.

Das Staatsstipendium, im Gesammtbetrage von 75 Gulden wurde zu je 25 Gulden den Oberprimanern Füller und Wiegand und dem Obersecundaner Weigand verliehen; das Och'sche Stipendium, im Gesammtbetrage von 90 Gulden, zu gleichen Theilen dem Obersecundaner Ackermann, den Obertertianern Hohmann und Kirchner, den Untertertianern Keitz und Sturmius Müller, den Quartanern Raimund Kircher, Hugo Henkel und Malkmus, dem Quintaner Joseph Stieb; das Habersack'sche Stipendium zu 24 Gulden eben so dem Untersecundaner Knorz und dem Obertertianer Axt; von dem Wehner'schen Stipendium zu 24 Gulden erhielt der Obertertianer Beck 14 Gulden, der Obersecundaner Genßler 10 Gulden.

Durch das Kurfürstliche Ministerium des Innern wurde 20 dürftigen und würdigen Schülern der Erlaß des Schulgeldes bewilligt und 18 andern von der Verwaltungs-Commission des Gymnasiums. Den dürftigen Schülern wurden die nöthigen Schulbücher aus dem zu diesem Zweck bestimmten Theil der Gymnasialbibliothek geliehen. Zu ganz besonderem Dank ist das Gymnasium vielen Einwohnern der Stadt für die menschenfreundliche Unterstützung, welche sie dürftigen Schülern durch die Gewährung von Freitischen zu Theil werden ließen, verpflichtet.

Zur Vermehrung der Mittel der im Jahre 1852 begründeten „Wohlthäterstiftung für dürftige und würdige Schüler des Gymnasiums zu Fulda" veranstalteten die Herren Domdechant Hohmann, Rentmeister Krisch, Hofapotheker Rullmann und Medizinalrath Dr. Wiegand auch im vorigen Herbst wieder eine Sammlung unter wohlthätigen Freunden und Gönnern des Gymnasiums. Von dem Ertrage derselben wurden sogleich 70 Gulden zur Unterstützung von sechs braven Schülern, einem Obersecundaner und einem Untersecundaner mit je 15 Gulden, zwei Obertertianern, einem Untertertianer und einem Quartaner mit je 10 Gulden, verwendet und der Kapitalfonds der Stiftung um die Summe von 58 fl. 55 kr. vermehrt. Hierdurch und durch Hinzufügung der Zinsen ist derselbe, welcher im Jahre 1852 40 fl. und zu Ostern v. J. 551 fl. 29 kr. 1 hlr. betrug, auf die Summe von 623 fl. 46 kr. 3 hlr. angewachsen, wovon 175 fl. bei Kurhessischer Landeskreditkasse zu 4 Prozent, 448 fl. 46 kr. 3 hlr. bei der hiesigen Sparkasse zu $3^1/_2$ Prozent angelegt sind.

Mit dem Bericht über das glückliche Gedeihen dieser für unsere Anstalt so segensreichen Stiftung verbindet der Unterzeichnete im Namen des Lehrercollegiums den Ausdruck des verbindlichsten Dankes gegen die hochverehrten Herren, welche diese Stiftung ins Leben gerufen und unausgesetzt gefördert, so wie gegen alle Gönner und Freunde des Gymnasiums, welche sich durch Beiträge bei derselben betheiligt haben.

D. Ordnung der öffentlichen Prüfung und Schlußfeierlichkeit.

Montag den 7. April 1862.

Prüfung der Sexta von 8—10 Uhr.

Religionslehre. Hahn. — Arithmetik. Rathmann. — Latein. Hahn. — Geographie. Rathmann.

Prüfung der Quinta von 10—12 Uhr.

Latein. Körber. — Geographie. Rathmann. — Geschichte. Bormann. — Arithmetik. Dr. Lotz.

Prüfung der Quarta von 2—4 Uhr.

Nepos. Gegenbaur. — Geschichte. Donner. — Griechisch. Schmittdiel. — Geometrie. Dr. Lotz.

Dienstag den 8. April.

Prüfung der Tertia von 8—10 Uhr.

Religionslehre. (Mit Quarta combinirt.) Dr. Claus. — Hom. Od. (Untertertia.) Körber. — Latein. (Obertertia.) Dr. Ostermann. — Geschichte. Donner.

Prüfung der Secunda von 10—12 Uhr.

Cicero. Dr. Weismann. — Französisch. Bormann. — Herodot. Dr. Ostermann. — Mathematik. Dr. Gies.

Prüfung der Prima von 2—4 Uhr.

Horaz. Der Director. — Physik. Dr. Gies. — Deutsch. Gegenbaur. — Sophokles. Dr. Weismann.

Mittwoch den 9. April, Vormittags 10 Uhr.

Ordnung der Schlußfeierlichkeit.

1. (Gesang.) „Auf, ihr Brüder! laßt uns wallen", von A. H. Weismann, Musik von J. Hartmann Stunz.
2. De virtute pietatis. Vortrag des Abiturienten Nikolaus Kircher.
3. Die Kirche, von v. Diepenbrock, vorgetragen von dem Sextaner Moriz Hartmann.
4. Des fremden Kindes hl. Christ, von Rückert, vorgetragen von dem Sextaner Heinrich Keßler.
5. Crösus und Solon, von Feuchtersleben, vorgetragen von dem Quintaner Johann Rebmann.
6. Der Spielmann, von Wetzel, vorgetragen von dem Quintaner Joseph Atzert.
7. Der Ring des Polykrates, von Schiller, vorgetragen von dem Quartaner Wilhelm v. Apell.
8. Des Sängers Fluch, von Uhland, vorgetragen vom Untertertianer Wilhelm Ide.
9. Das eleusische Fest, von Friedrich Schiller, vorgetragen von dem Obertertianer Georg Wesener.
10. „Ueber allen Gipfeln ist Ruh" von Goethe, Musik von Schnyder von Wartensee.
11. Versuch einer Charakteristik Hagens, nach dem Nibelungenliede. Vortrag des Unterprimaners Friedrich Rauch.
12. Babel, von Geibel, vorgetragen von dem Obersecundaner Joseph Medler.
13. Ueber die Blüte der höfisch-lyrischen Poesie im Mittelalter. Vortrag des Abiturienten Ferdinand v. Winckler, womit derselbe im Namen der Abiturienten von der Schule Abschied nehmen wird.
14. „Nimm deine schönsten Melodieen", von J. J. Sprüngli, Musik von Franz Abt.
15. Entlassung der Abiturienten. Bekanntmachung der Versetzung der Schüler in höhere Klassen.

Alle Freunde der Jugendbildung, insbesondere die Eltern und Angehörigen der Schüler, werden zur Theilnahme an der öffentlichen Prüfung und Schlußfeierlichkeit ergebenst eingeladen.

Das neue Schuljahr wird Dienstag den 29. April, 9 Uhr Vormittags, im Prüfungssaale mit Choralgesang und Gebet eröffnet werden.

Anmeldungen zur Aufnahme in das Gymnasium, welche unter Vorlage eines Tauf- oder Geburtsscheines und eines Zeugnisses über den bisher genossenen Unterricht erfolgen müssen, wird der Unterzeichnete am 25., 26. und 28. April in den Vormittagsstunden entgegennehmen.

Wer in die Sexta eintreten will, muß in der Regel das neunte Lebensjahr zurückgelegt haben. Die Vorkenntnisse, welche für diese Classe verlangt werden, sind: a) Fertigkeit im deutlichen und nach Verhältniß dieser Altersstufe ausdrucksvollen Lesen und im Schreiben deutscher und lateinischer Schrift; b) Fähigkeit, eine kurze Geschichte mündlich und schriftlich ohne allzu grobe Fehler nachzuerzählen; c) Fertigkeit im Rechnen der vier Species mit ganzen Zahlen; d) Kenntniß biblischer Geschichten. Vorkenntnisse in der lateinischen Sprache sind zur Aufnahme in die Sexta nicht erforderlich.

An die auswärtigen Eltern, welche ihre Söhne für eine höhere Classe des hiesigen Gymnasiums als die Sexta vorbereiten lassen, richtet der Unterzeichnete wiederholt das dringende Ersuchen, soviel es die Umstände gestatten dahin zu wirken, daß dieselben nach dem Lehrplan und den Lehrbüchern unserer Anstalt unterrichtet werden. Es ist dies namentlich in Beziehung auf den Unterricht im Lateinischen und Griechischen sehr wünschenswerth. Für den lateinischen Unterricht werden in den untern und mittleren Classen Dr. Ostermann's Vocabularien und Uebungsbücher, sowie Meiring's Elementargrammatik; für den griechischen Unterricht Dominicus griechisches Elementarbuch, sowie Buttmann's griechische Grammatik gebraucht. Der Unterzeichnete ist übrigens bereit, auf etwaige besondere Anfragen noch weitere Auskunft zu ertheilen.

Fulda, den 28. März 1862.

Dr. Eduard Wesener,
Gymnasial-Director.

Tabellarische Uebersicht der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Fulda im Schuljahre 1861—62.

1. Lehrer.

Bestand des Lehrercollegiums am Schlusse des Schuljahrs.

Director: Dr. Wesener.

Ordentliche Hauptlehrer:
Dr. Weismann.
Dr. Gies.
Hahn.
Dr. Lotz.
Bormann.
Donner.
Gegenbaur.
Dr. Ostermann.
Schmittdiel.

Beauftragter Lehrer: Körber.

Evangel. Religionslehrer:
Pfarrer Dr. Claus.

Gesanglehrer: Henkel.
Zeichenlehrer: Binder.
Schreiblehrer: Rathmann.

2. Allgemeiner Lehrplan.

Lehrgegenstände.	Wöchentliche Stunden in I	II	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Summe
Griechisch	6	6	6	6	5	—	—	29
Lateinisch	8	9	8	8	9	10	10	62
Deutsch	4	3	3	3	2	2	3	20
Französisch	2	2	2	2	—	—	—	8
Religionslehre	2	2	2	2	2	2	2	14
Geschichte	3	3	2	2	2	2	—	14
Geographie			2	2	2	2	2	10
Mathematik	4	4	4	4	4	4	4	28
Physik	2	—	—	—	—	—	—	2
Naturkunde	—	2	2	2	2	2	2	12
Gesang	[1	1	1	1]	[1	1 1	1 1]	4
Zeichnen	[2	2	2	2]	1	2	2	7
Schönschreiben	—	—	—	—	2	2	4	8
Turnen	[2	2	2	2]	[2	2	2]	4
Summe der wöchentl. Lehrstunden	31	31	31	31	31	30	30	222

3. Schüler.

In	waren beim Beginne des Schuljahrs	gingen ab	traten hinzu	sind am Schlusse des Schuljahrs	Abiturienten. Michaelis 61.	Ostern 62.
I	23	4	—	19	—	7
II	29	2	—	26		
IIIa	26	1	—	24		
IIIb	22	2	1	21		
IV	38	3	6	41		
V	48	4	—	44		
VI	36	5	2	33		
Sc.	222	21	9	208		

Von den Abiturienten widmen sich:

Der Theologie 3.
" Mathematik und Naturwissenschaft 1.
" Staatswissenschaft 2.
" Jurisprudenz 1.

Anmerkung. Die durch Einklammern der Zahlen als combinirt bezeichneten Stunden sind, da nicht alle Schüler daran theilnehmen, bei der Summirung der wöchentlichen Lehrstunden jeder Classe unberücksichtigt geblieben.